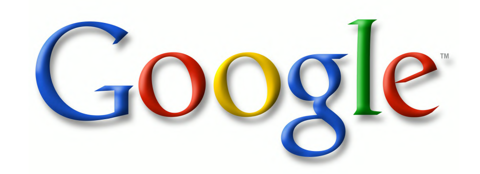
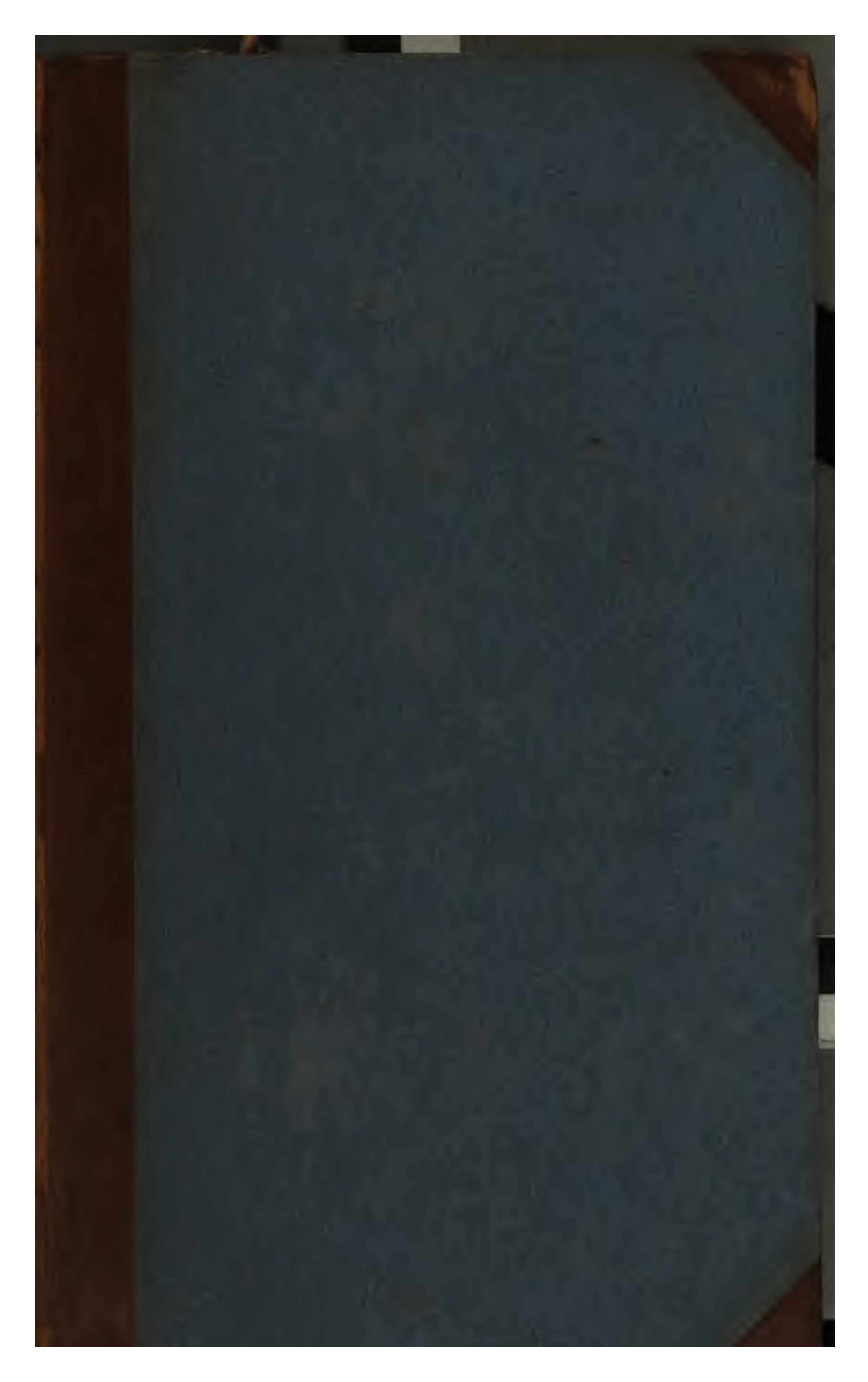
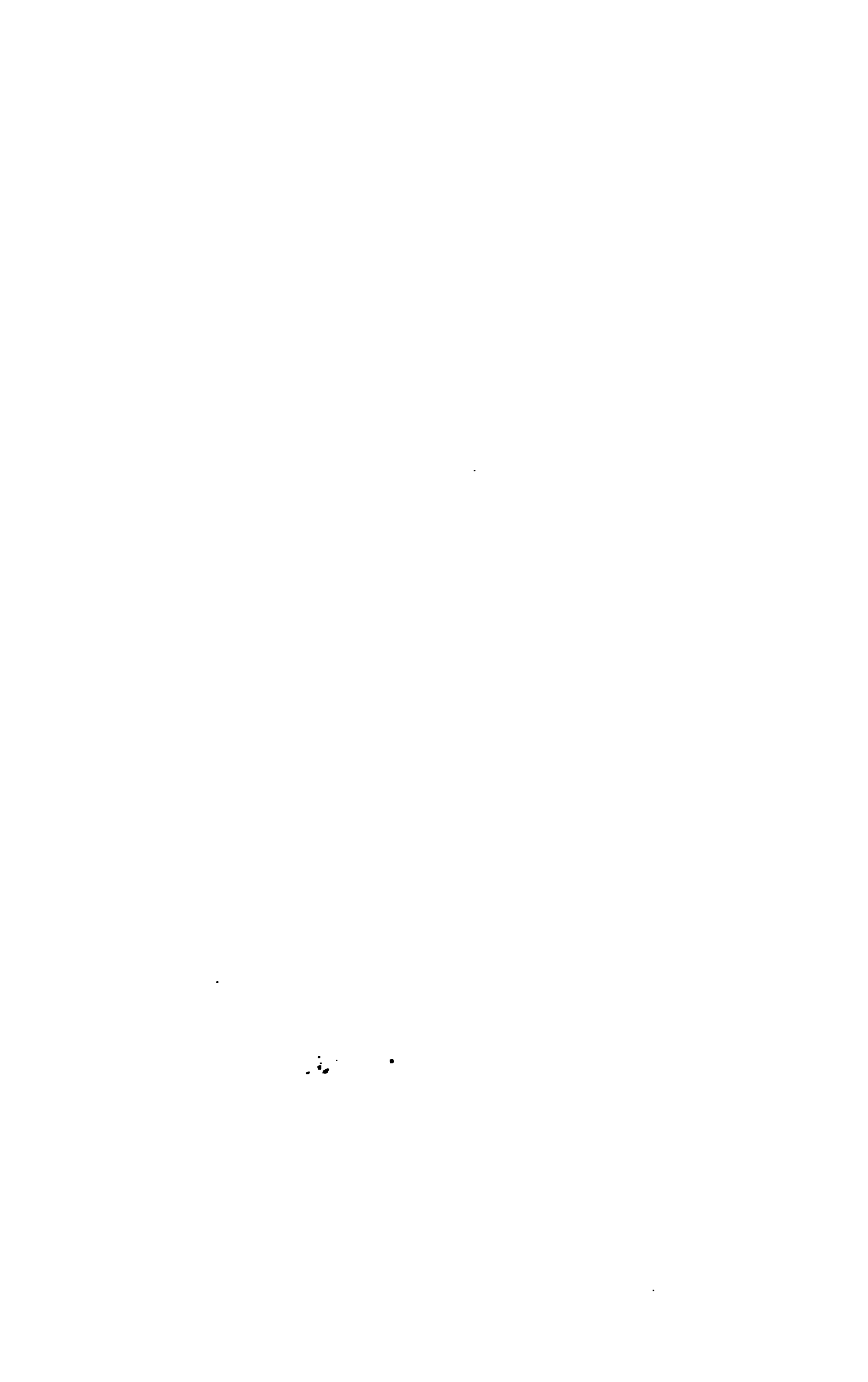








Lehrbuch

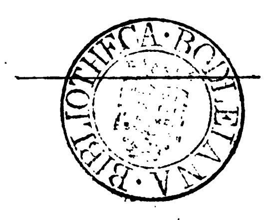
der

STATIK

von

August Ferdinand Möbius,

Professor der Astronomie zu Leipzig, Correspondenten der Königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin und Mitgliede der naturforschenden Gesellschaft in Leipzig.



Erster Theil.

Mit zwei Kupfertafeln.

LEIPZIG

bei Georg Joachim Göschen.

1837.



Vorrede.

Die erste Veranlassung zu einer anhaltenderen Beschäftigung mit der Statik und damit zur Abfassung der vorliegenden Schrift gab mir das Studium des zwar kleinen, aber gehaltreichen und elegant geschriebenen Werkes von Poinsot über die Statik *). Ich lernte daraus, wie die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht zwischen Kräften, welche auf einen frei beweglichen festen Körper wirken, einfacher, als auf irgend einem andern der bisher bekannten Wege, mit Hülfe der Theorie der von ihm sogenannten *couples* (Paare von einander gleichen und nach parallelen aber entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräften) entwickelt werden können; und die dem Ende des Werks beigefügte Abhandlung (*Mémoire sur la composition des momens et des aires*), worin die Theorie dieser Kräftepaare noch weiter verfolgt wird, und mehrere, zum Theil neue, Sätze, die Eigenschaften der Momente von Kräften betreffend, aus dieser Theorie höchst einfach hergeleitet werden, nahm mein ganzes Interesse in Anspruch.

Da ich nun bei fortgesetzter Beschäftigung mit diesen Gegenständen mehrere eigene Untersuchun-

*) Élémens de Statique... par L. Poinsot. 4ème édit. Paris 1824.

gen anstellte und Ansichten gewann, nach denen, wie es mir schien, die einzelnen Lehren der Statik theils vervollständigt, theils auf eine etwas systematischere Weise, als in den bisherigen Lehrbüchern, geordnet werden könnten, so fühlte ich mich bewogen, meine zum Theil schon in Crelle's mathematischem Journal bekannt gemachten Untersuchungen im Zusammenhange zu veröffentlichen und damit ein für sich bestehendes Lehrbuch der reinen Statik abzufassen, in welchem die Lehren dieser Wissenschaft möglichst vollständig und in systematischer Folge auseinandergesetzt sind.

Die Methode, deren ich mich in diesem Lehrbuche bedient habe, ist ausschliesslich weder die synthetische noch die analytische. Doch habe ich in der Regel der erstern den Vorzug gegeben, wenn eine einfache geometrische Construction zur Führung eines Beweises oder zur Lösung einer Aufgabe hinreichend war, so wie ich auch nicht selten die schon durch Analysis gefundenen Sätze durch geometrische Betrachtungen noch zu erläutern gesucht habe: beides aus dem Grunde, weil bei Untersuchungen, welche räumliche Gegenstände betreffen, die geometrische Betrachtung eine Betrachtung der Sache an sich selbst und daher die natürlichste ist, während bei einer analytischen Behandlung, so elegant diese auch seyn mag, der Gegenstand sich hinter fremdartigen Zeichen verbirgt und damit unserem Auge mehr oder weniger verloren geht.

Ueberhaupt findet zwischen der Statik und der Geometrie ein sehr inniger Zusammenhang statt, indem nicht allein erstere Wissenschaft der Hülfe der letztern unumgänglich bedarf, sondern weil

auch umgekehrt, gleichsam zum Lohne für die geleistete Hülfe, die Statik der Geometrie neue Sätze zuführt, Sätze, die nicht selten wiederum zum Vortheile der Statik verwendet werden können. Der Belege hierzu wird man nicht wenige in diesem Buche finden. Zuweilen haben Statik und Geometrie sogar einen gemeinschaftlichen Zweck und weichen nur in Hinsicht der zu diesem Zwecke führenden Mittel von einander ab. Ein Beispiel hierzu ist die Untersuchung, in wie viel Punkten zwei oder mehrere Körper einander berühren müssen, wenn ihre gegenseitige Lage unveränderlich seyn soll. Denn diese und ähnliche Untersuchungen können eben sowohl mit Hülfe statischer Principien, als rein geometrisch angestellt werden. Möge es daher dem Leser nicht unangenehm auffallen, wenn er hier in Fällen, wo eine Reihe geometrischer Sätze mir entweder an sich merkwürdig, oder wegen ihres Einflusses auf andere Untersuchungen der Beachtung werth schien, von dem Gebiete der Statik auf das der reinen Geometrie geführt wird.

Das Werk zerfällt in zwei Theile, von denen der erste das Gleichgewicht an einem einzigen Körper, der zweite das Gleichgewicht an mehrern mit einander verbundenen Körpern behandelt. Jedem der beiden Theile ist eine Anzeige des Inhalts vorangesetzt, woraus die Aufeinanderfolge der behandelten Gegenstände zur Genüge erkannt werden kann. Es dürfte aber nicht überflüssig seyn, hier Einiges über ihren gegenseitigen Zusammenhang noch vorauszuschicken, wobei sich zugleich Gelegenheit zu einigen Bemerkungen finden wird, für welche im Buche selbst kein passender Ort war.

Die ersten Elemente habe ich eben so, wie Poinsot, durch die schon erwähnte Theorie der Kräftepaare zu vereinfachen gesucht. Doch bin ich hierin einen Schritt weiter gegangen. Poinsot nämlich trägt diese Theorie erst dann vor, nachdem er parallele Kräfte und auf einen Punkt wirkende Kräfte zusammenzusetzen gelehrt hat. Dagegen folgt hier die Theorie der Paare unmittelbar auf die allgemeinsten Sätze vom Gleichgewichte, und dann erst die Theorie von der Zusammensetzung von Kräften, welche nicht Paare bilden. Denn nicht nur lässt sich die letztere Theorie, nachdem die erstere vorausgegangen, ungleich einfacher, als ohnedem, entwickeln, sondern es ist auch, wie man sich überzeugen wird, die erstere Theorie ganz unabhängig von der letztern darstellbar.

Bereits in einem in Crelle's math. Journal *) befindlichen Aufsatze habe ich gezeigt, wie die Theorie der Paare selbstständig entwickelt und aus ihr ohne weiteres die sechs Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht zwischen Kräften, die nach beliebigen Richtungen im Raume auf einen frei beweglichen Körper wirken, hergeleitet werden können, woraus sich zuletzt die drei Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht zwischen Kräften in einer Ebene, als für einen speciellen Fall, ergeben. Wiewohl nun die grosse Kürze dieses Wegs ihm zur Empfehlung gereichen möchte, so dürfte doch der unmittelbare Fortgang zu dem allgemeinsten Falle Manchem für das erste Studium zu überraschend scheinen, und ich habe es daher im Gegenwärtigen vorgezogen, die auf dieselbe Weise behandelte Theorie des Gleichge-

*) 7. Band, S. 205 216.

wichts in einer Ebene vorauszuschicken und dadurch den Leser zum Verständniss der Theorie des Gleichgewichts im Raume vorzubereiten.

Die im 6ten Kapitel des ersten Theils folgende weitere Ausführung der Theorie der Momente beschäftigt sich mit der Beantwortung der zwei Fragen: erstens, nach welchen Gesetzen das Moment eines Systems von Kräften im Raume, welche nicht im Gleichgewichte sind, von einer Axe zur andern, auf welche das Moment bezogen wird, veränderlich ist; und zweitens, unter welchen Bedingungen und auf welche Weise aus den Momenten des Systems für eine Anzahl von Axen die Momente für noch andere Axen gefunden werden können. Die Untersuchungen, zu welchen die erste dieser Fragen veranlasst, sind — die Darstellung der Momente durch Kugelsehnen, den darauf gegründeten Beweis für das Parallelogramm der Kräfte und die Theorie der Nullebenen und Nullpunkte ausgenommen — schon von Poinsot und Andern geführt worden. Die zweite Frage habe ich in grösster Allgemeinheit zu beantworten gesucht und Resultate erhalten, von denen bisher nur einige specielle Fälle bekannt waren.

In den noch übrigen Kapiteln des ersten Theils wird angenommen, dass ein frei beweglicher Körper, auf welchen Kräfte wirken, auf irgend eine Weise aus seiner Lage verrückt wird, während die Kräfte auf ihre Angriffspunkte mit unveränderlicher Stärke und parallel mit ihren anfänglichen Richtungen zu wirken fortfahren, und es wird nun untersucht, wie durch diese Lageänderung des Körpers die Wirkung der Kräfte geändert wird. Der einfachste hierbei mögliche Fall ist der, wenn die Kräfte parallele Richtungen ha-

ben und auf eine einzelne Kraft zurückgeführt werden können. Denn alsdann bleiben sie auch bei jeder Verrückung des Körpers auf eine einzelne Kraft reducirbar, und diese Kraft trifft immer auf einen Punkt, welcher gegen die Angriffspunkte der erstern Kräfte eine unveränderliche Lage hat und unter dem Namen des Mittelpunkts paralleler Kräfte bekannt ist. Aehnliche Untersuchungen habe ich hier auch in Bezug auf Systeme nicht paralleler Kräfte angestellt und glaube, dass die gewonnenen Resultate nicht bloss ihrer Neuheit willen *), sondern auch wegen ihrer verhältnissmässigen Einfachheit und weil sie zu vielleicht noch fruchtreichern Forschungen über diesen Gegenstand Veranlassung geben können, der Beachtung nicht unwerth sind.

Genau mit diesen Untersuchungen hängt die Lehre von der Sicherheit des Gleichgewichts zusammen. Denn halten sich die Kräfte anfänglich das Gleichgewicht, so wird dasselbe bei einer auch noch so geringen Lageänderung des Körpers im Allgemeinen aufgehoben, und jenachdem die Kräfte den Körper in die anfängliche Lage zurückzubringen oder noch weiter davon zu entfernen suchen, wird das Gleichgewicht sicher oder unsicher genannt. Ich habe daher nicht angestanden, auch die Lehre von der Sicherheit, so weit es ohne Einmischung der Dynamik geschehen konnte, hier vorzutragen und, unterstützt

---

*) Neu bis auf die erst kürzlich von Minding über denselben Gegenstand, jedoch auf eine von der meinigen ganz verschiedene Weise angestellten und mit zum Theil merkwürdigen Ergebnissen begleiteten Untersuchungen. Man findet dieselben in Crelle's Journal 14. Band S. 289, 15. Band, S. 27 und 313. — Eine Uebersicht der von mir gefundenen und in gegenwärtiger Schrift dargelegten Resultate siehe im 16. Bande S. 1. desselben Journals.

durch die vorhergehenden Ergebnisse, die Function zu entwickeln, aus deren Vorzeichen erkannt wird, ob ein gegebenes Gleichgewicht sicher oder unsicher ist. Die Umständlichkeit, mit welcher ich diesen Gegenstand behandelt habe, dürfte dadurch, dass ungeachtet der elementaren Behandlung, deren er fähig ist, sich über ihn in den bisherigen Lehrbüchern der Statik nur weniges oder nichts vorfindet, hinlänglich gerechtfertigt werden.

Zwischen dem Zustande des Gleichgewichts in Bezug auf Sicherheit und den Eigenschaften des grössten oder kleinsten Werthes einer veränderlichen Grösse findet eine grosse Aehnlichkeit statt. Dies leitet auf die Vermuthung, dass es eine Function der die Kräfte und deren Angriffspunkte bestimmenden Grössen gebe, welche beim Gleichgewichte ein Maximum oder ein Minimum ist. Die Entwickelung dieser Function, deren zweites Differential die Merkmale für die Sicherheit oder Unsicherheit abgiebt, ist in dem letzten Kapitel des ersten Theiles enthalten. Das erste Differential derselben Function muss zu Folge der Natur der Grössten und Kleinsten null seyn, welches zu dem in diesem Kapitel gleichfalls behandelten Princip der virtuellen Geschwindigkeiten führt. Die Herleitung einer noch andern Function, die beim Gleichgewichte ebenfalls ein Maximum oder ein Minimum ist, und die für den Fall, dass die Kräfte durch unendlich kleine Linien ausgedrückt werden, bereits von Gauss aufgestellt worden, macht den Beschluss des ersten Theils.

Im zweiten Theile wird das Gleichgewicht an mehrern mit einander verbundenen Körpern betrachtet. Hier suchte ich zuerst mit möglichster Schärfe und Allgemeinheit die Bedingungen eines

solchen Gleichgewichts zu entwickeln. Ich glaubte in dieser Hinsicht etwas ausführlicher seyn zu müssen, da in den mir wenigstens bekannt gewordenen Lehrbüchern der Statik nur einzelne Beispiele vom Gleichgewichte an verbundenen Körpern, oder höchstens eine Angabe der allgemeinen Bedingungen für dasselbe, kein strenger Beweis dieser Bedingungen, anzutreffen sind. Ohne mich über den Gang, den ich dabei genommen, hier weiter zu verbreiten, bemerke ich nur, dass ich hierher auch das Gleichgewicht an einem einzigen an seiner Bewegung zum Theil gehinderten Körper gerechnet habe, indem ein solcher Körper als ein mit einem zweiten ganz unbeweglichen in Verbindung stehender betrachtet werden kann. — Auf das Gleichgewicht an mehrern mit einander verbundenen Körpern musste jetzt auch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ausgedehnt werden, da es im Vorigen nur für einen einzigen frei beweglichen Körper bewiesen worden war, und ich hoffe, dass der hier gegebene allgemeine Beweis dieses Princips sowohl hinsichtlich seiner Einfachheit, als seiner Strenge, befriedigen wird.

Unter den mancherlei Verbindungsarten zweier oder mehrerer Körper verdienen diejenigen eine besondere Berücksichtigung, bei welchen die Körper in so vielen Punkten verbunden sind, dass, wenn auch jeder Körper an sich frei beweglich ist, doch keine gegenseitige Beweglichkeit statt findet, und dass folglich, wenn einer von ihnen unbeweglich gemacht wird, das ganze System unbeweglich wird. Die Bedingungen dieser Unbeweglichkeit werden im 4ten Kapitel statisch bestimmt; es werden nämlich die Fälle untersucht, in welchen, was

auch für Kräfte an den Körpern angebracht werden, doch keine Bedingungen für's Gleichgewicht hervorgehen.

Wenn aber auch die Lage von Körpern oder der Theile einer Figur unveränderlich ist, so lassen sich doch immer specielle Bedingungen für das Verhalten der Theile zu einander ausfindig machen, unter denen die Unbeweglichkeit in eine unendlich kleine Beweglichkeit übergeht. Wie diese Bedingungen statisch gefunden werden können, und wie damit zugleich Maxima und Minima der Figur bestimmt werden, dies habe ich im 5ten Kapitel gezeigt und die dazu angegebene Methode durch mehrere Beispiele erläutert. Irre ich mich nicht, so ist diese Methode noch einer grössern Ausbildung fähig und wegen ihres Nutzens für die Geometrie dieser Ausbildung nicht unwerth.

Die einfachste Art, auf welche mehrere Körper mit einander verbunden seyn können, besteht darin, dass keiner mit mehr als zwei der übrigen verbunden ist. Ein solches System wird im Allgemeinen eine Kette genannt, und, wenn die Körper unendlich klein sind, ein Faden. Die Lehre vom Gleichgewichte an Fäden wird im 6ten, 7ten und 8ten Kapitel behandelt. Nachdem in dem 6ten die Theorie des Gleichgewichts an einem vollkommen biegsamen Faden auseinandergesetzt worden, wird im 7ten auf die, wie es scheint, noch nicht beachtete vollkommene Analogie aufmerksam gemacht, die zwischen dem Gleichgewichte an einem solchen Faden und der Bewegung eines materiellen Punktes statt findet, und wonach jedes Fadengleichgewicht als das Abbild der Bewegung eines Punktes, und umgekehrt, an-

gesehen werden kann, und jedem Satze in der Theorie des einen ein Satz in der Theorie des andern entspricht. Insbesondere habe ich hiernach das Princip der Flächen, das Princip der lebendigen Kräfte und das Princip der kleinsten Wirkung, insofern diese Sätze die Bewegung nur eines Punktes betreffen, aus der Dynamik auf das Fadengleichgewicht übergetragen und damit drei entsprechende Sätze erhalten, von denen der dritte neu und merkwürdig zugleich seyn dürfte.

In Betreff des 8ten und letzten Kapitels, welches das Gleichgewicht an elastischen Fäden untersucht, werde noch bemerkt, dass die der Natur der Sache sehr angemessene Eintheilung elastischer Fäden in elastisch dehnbare, biegsame und drehbare aus einer im *Journal de l'école polytechnique, Tome X. p.* 418, befindlichen Abhandlung von Binet über diesen Gegenstand entlehnt worden, und dass, obschon zwischen dem Gleichgewichte an einem elastischen Faden und der Bewegung eines Punktes keine Analogie herrscht, es mir doch gelungen ist, in Bezug auf das Gleichgewicht an einem elastisch biegsamen Faden Sätze aufzufinden, welche dem zweiten und dritten der eben gedachten drei Sätze rücksichtlich des Gleichgewichts an einem vollkommen biegsamen Faden und damit dem Princip der lebendigen Kräfte und dem Princip der kleinsten Wirkung entsprechen.

Inhalt des ersten Theiles.

Gesetze des Gleichgewichts zwischen Kräften, welche auf einen einzigen festen Körper wirken.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Sätze vom Gleichgewichte.

Zweites Kapitel.

Vom Gleichgewichte zwischen Kräftepaaren in einer Ebene.

Drittes Kapitel.

Vom Gleichgewichte zwischen Kräften in einer Ebene überhaupt.

Viertes Kapitel.

Vom Gleichgewichte zwischen Kräftepaaren im Raume.

Sechstes Kapitel.

Weitere Ausführung der Theorie der Momente.

Achtes Kapitel.

Von den Axen des Gleichgewichts.

Neuntes Kapitel.

Von der Sicherheit des Gleichgewichts.

Zehntes Kapitel.

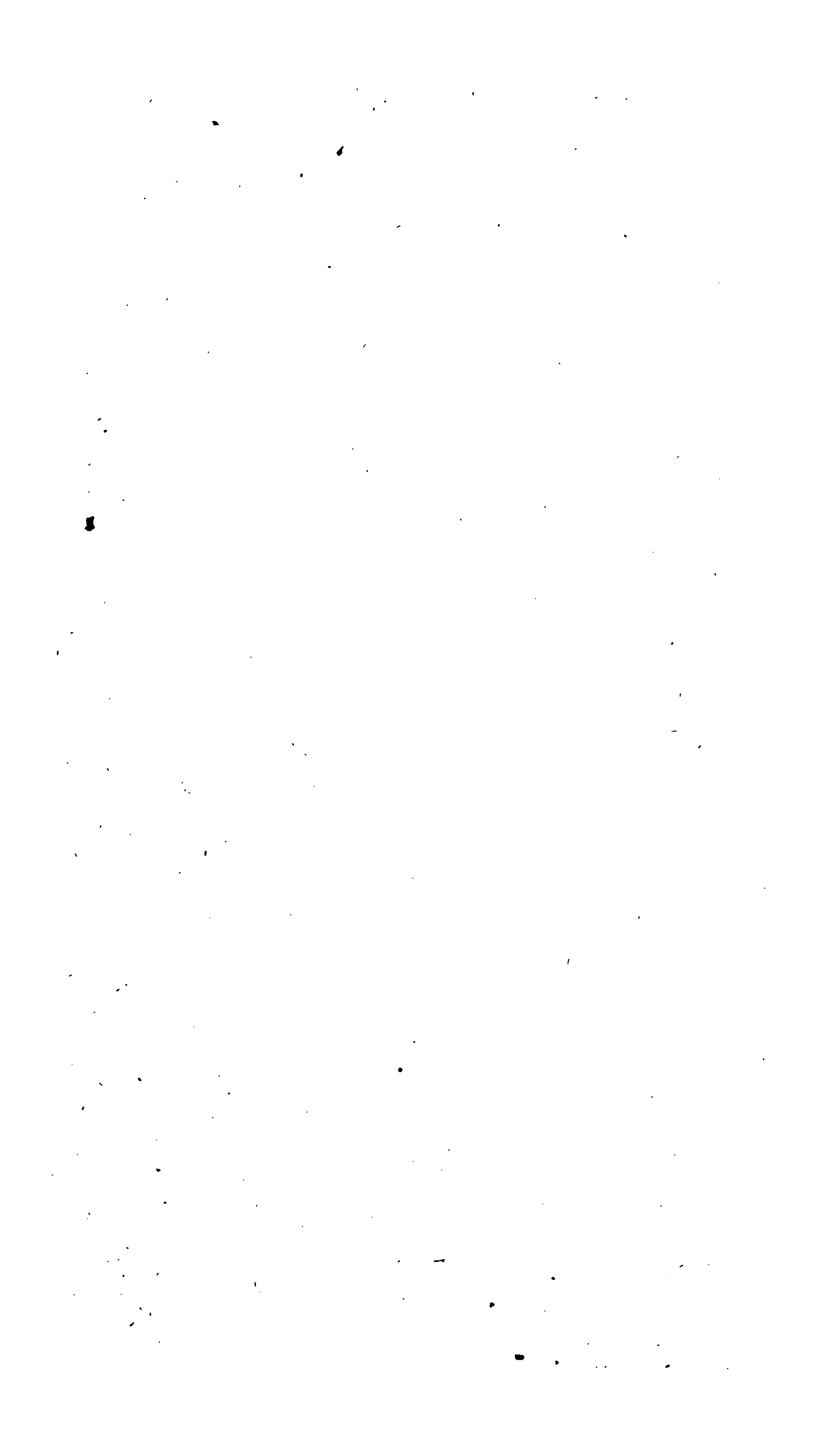
Von den Maximis und Minimis beim Gleichgewichte.

Erster Theil.

Gesetze des Gleichgewichts

zwischen Kräften,

welche auf einen einzigen festen Körper wirken.



Erstes Kapitel.

Allgemeine Sätze vom Gleichgewichte.

§. 1.

Ein ruhender Körper kann nicht von selbst sich zu bewegen anfangen. Die Ursache der Bewegung eines vorher ruhenden Körpers muss daher eine äussere seyn. Diese äussere Ursache der Bewegung nennt man Kraft.

Nicht immer wird durch die Wirkungen von Kräften auf einen oder mehrere in Verbindung mit einander stehende Körper Bewegung erzeugt. Es kann auch geschehen, dass die Wirkungen der Kräfte sich gegenseitig aufheben. Dieser Zustand der Ruhe, welcher ungeachtet mehrfacher Veranlassung zur Bewegung statt findet, heisst Gleichgewicht, und die Wissenschaft der Bedingungen, unter welchen die auf einen, oder mehrere mit einander verbundene, Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sind, wird die Statik genannt.

§. 2.

Im Vorliegenden werden wir die Bedingungen des Gleichgewichts nur bei festen Körpern, d. h. bei denen in Untersuchung ziehen, bei welchen die gegenseitigen Entfernungen ihrer Theilchen durch keine Kraft geän-

dert werden können. Allerdings ist dieser Begriff von Festigkeit nur ideal, indem es keinen Körper in der Natur giebt, dessen Gestalt durch die Einwirkung von Kräften nicht in etwas, sei es auch noch so unmerklich, geändert würde. Die Resultate, zu denen wir unter der Annahme solch' einer idealen Festigkeit durch die Theorie gelangen, werden daher durch keine Erfahrung vollkommen bestätiget werden. Indessen wird von diesen Resultaten die Erfahrung um so weniger abweichen, je weniger die dabei angewendeten Körper von jener idealen Festigkeit sich entfernen.

Uebrigens werden wir in diesem ersten Theile der Statik das Gleichgewicht nur an einem einzigen, mit keinem andern in Berührung stehenden und somit frei beweglichen, festen Körper betrachten. Ein solcher ist daher in dem Nächstfolgenden, auch wenn er nicht besonders erwähnt wird, stets als vorausgesetzt anzunehmen.

§. 3.

Derjenige Punkt eines Körpers, den eine auf den Körper wirkende Kraft zunächst in Bewegung zu setzen strebt, heisst der Angriffspunkt der Kraft. Die Richtung aber, nach welcher sich dieser Punkt, wäre er ohne Verbindung mit dem Körper, durch die Kraft getrieben, bewegen würde, nennt man die Richtung der Kraft.

Ausser dem Angriffspunkte und der Richtung ist bei jeder Kraft noch ihre Intensität oder Stärke zu berücksichtigen, eine Grösse, deren Begriff hier noch nicht näher bestimmt werden kann, sondern erst im weitern Fortgange dieses Kapitels durch die Principien des Gleichgewichts selbst seine Bestimmung erhalten wird.

§. 4.

I. Grundsatz. **An einem frei beweglichen Punkte, auf welchen eine Kraft wirkt, kann immer eine zweite, der erstern das Gleichgewicht haltende, Kraft angebracht werden, und diese zweite muss, wenn Gleichgewicht statt finden soll, eine der erstern entgegengesetzte Richtung haben.**

Nicht je zwei auf einen frei beweglichen Punkt nach entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräfte halten einander das Gleichgewicht. Geschieht dieses aber, so sollen die Kräfte ihrer Intensität nach einander gleich, oder schlechthin einander gleich genannt werden.

Wenn von drei Kräften die erste und zweite, an einem Punkte nach entgegengesetzten Richtungen angebracht, mit einander im Gleichgewichte sind, und wenn dasselbe auch von der zweiten und dritten gilt, so gilt es auch von der ersten und dritten; oder kürzer:

II. Grundsatz. **Zwei Kräfte, deren jede einer dritten gleich ist, sind einander selbst gleich.**

III. Grundsatz. **Ist von zwei oder mehrern auf einen Körper wirkenden Systemen von Kräften jedes für sich im Gleichgewichte, so sind es auch die Kräfte aller Systeme in Vereinigung.**

IV. Grundsatz. **Wenn zwischen mehrern auf einen Körper wirkenden Kräften Gleichgewicht statt findet, und eine Anzahl derselben für sich im Gleichgewicht ist, so herrscht**

auch zwischen den übrigen, für sich genommen, Gleichgewicht.

§. 5.

Folgerungen. *a*. Hält eine Kraft p einem Systeme S zweier oder mehrerer Kräfte das Gleichgewicht, so ist auch jede andere der p gleiche Kraft q, wenn sie an dem Angriffspunkte A von p und nach der Richtung von p angebracht wird, mit S im Gleichgewichte. Denn sei r eine zweite der p, also auch (II.) der q, gleiche Kraft. Man bringe q in A nach der Richtung von p, und r ebendaselbst nach der entgegengesetzten Richtung, an. Alsdann ist q mit r im Gleichgewicht, und es wird folglich das Gleichgewicht zwischen p und S dadurch nicht gestört. (III.). Bei dem nunmehrigen Systeme von p, q, r, S sind aber auch p und r im Gleichgewichte; folglich muss auch zwischen q und S Gleichgewicht statt finden. (IV.).

b. Halten sich mehrere Kräfte p, q, r,... das Gleichgewicht, so besteht dasselbe auch zwischen Kräften p', q', r',..., die den ersteren resp. gleich sind und auf die Angriffspunkte der erstern nach entgegengesetzten Richtungen wirken. Denn lässt man p', q', r',... mit p, q, r,... zugleich wirken, so ist p' mit p, q' mit q, u. s. w. besonders im Gleichgewichte; folglich sind es auch p, q, r,... und p', q', r',... in Vereinigung (III.). Weil aber p, q, r,... für sich im Gleichgewichte sind, so herrscht dasselbe auch zwischen p', q', r',... (IV.)

In dem System von p', q', r',... kann nach *a*. für p' die ihr gleiche Kraft p nach der Richtung von p', und eben so q für q' nach der Richtung von q', u. s. w.

gesetzt werden. Hiernach lässt sich der voranstehende Satz auch also ausdrücken:

Das Gleichgewicht zwischen mehrern Kräften wird nicht unterbrochen, wenn man jede Kraft an ihrem Angriffspunkte nach einer, ihrer anfänglichen entgegengesetzten, Richtung anbringt.

c. Bezeichne P ein System von Kräften, und P' ein zweites, in welchem die Angriffspunkte und Intensitäten der Kräfte dieselben wie im ersten, die Richtungen aber die entgegengesetzten sind. In derselben gegenseitigen Beziehung stehen die Systeme Q und Q', S und S'. Ist nun 1) P mit Q und 2) P mit S im Gleichgewichte, so ist es auch Q' mit S. Denn wegen 1) ist nach *b.* P' mit Q' im Gleichgewichte, folglich sind wegen 2) nach III. P', Q', P, S zusammen im Gleichgewichte. Es sind aber die Systeme P und P' für sich im Gleichgewichte, weil sie zusammen aus Paaren von einander gleichen Kräften bestehen, die auf einerlei Punkt einander entgegen wirken. Mithin müssen nach IV. auch Q' und S sich das Gleichgewicht halten.

Da endlich nach *a.* statt Q' die Kräfte des Systems Q selbst, nach entgegengesetzten Richtungen genommen, gesetzt werden können, so lässt sich der eben erwiesene Satz folgendergestalt aussprechen: Wenn von zwei Systemen von Kräften (Q und S) jedes mit einem dritten (P) im Gleichgewicht ist, so sind sie es auch unter sich, nachdem die Kräfte des einen (Q) an ihren Angriffspunkten nach entgegengesetzten Richtungen angebracht worden.

§. 6.

Zwei auf einen Körper wirkende Systeme von Kräften nenne man g l e i c h w i r k e n d, wenn das eine, nach-

dem die Richtungen seiner Kräfte in die entgegengesetzten verwandelt worden, dem andern das Gleichgewicht hält. So sind, mit Anwendung der vorigen Bezeichnung, die Systeme P' und Q, oder P' und S, so wie P und S', gleichwirkend, wenn P mit Q, oder P mit S im Gleichgewicht ist; und eben so sind Q und S gleichwirkend, wenn Q' und S, also auch Q und S' sich das Gleichgewicht halten.

Mit Hülfe dieser Benennung lässt sich der Satz in §. 5. *c.* auf mehrfache Weise ausdrücken:

1) *Zwei Systeme von Kräften* (Q *und* S), *deren jedes mit einem dritten* (P) *im Gleichgewicht ist, sind von gleicher Wirkung; und umgekehrt:*

2) *Sind zwei Systeme* (P *und* S') *gleichwirkend, so ist mit jedem dritten Systeme* (Q), *mit welchem das eine* (P) *das Gleichgewicht hält, auch das andere* (S') *im Gleichgewichte; d. i.: Gleichwirkende Systeme können in Bezug auf das Gleichgewicht für einander gesetzt werden.*

3) *Zwei Systeme* (Q *und* S), *deren jedes einem dritten* (P') *gleichwirkend ist, sind es auch unter sich.*

§. 7.

Eben so, wie ganze Systeme, können auch einzelne Kräfte unter sich und mit Systemen einerlei Wirkung haben. Sollen zwei einzelne Kräfte gleichwirkend sein, so muss, nach der vorhergehenden Definition gleichwirkender Systeme, die eine, in entgegengesetzter Richtung genommen, der andern das Gleichgewicht halten. Es müssen folglich beide, wenn sie auf einen und denselben Punkt des Körpers wirken, einerlei Richtung und gleiche Intensität haben.

Eine einzelne Kraft, welche mit einem Systeme von zwei oder mehrern Kräften gleichwirkend ist, heisst die Resultante des Systems.

Hat daher ein System eine Resultante, und wird diese mit entgegengesetzter Richtung als neue Kraft dem Systeme hinzugefügt, so kommt dadurch das System ins Gleichgewicht. Und umgekehrt: ist ein System im Gleichgewichte, so ist jede Kraft desselben, nach entgegengesetzter Richtung genommen, die Resultante der jedesmal übrigen.

Ist die Kraft p die Resultante des Systems S, und soll auch die Kraft q als Resultante von S gelten können, so müssen nach §. 6. 3. p und q gleichwirkend sein und folglich, wenn sie auf einerlei Punkt wirken, einerlei Richtung und gleiche Intensität haben. *Einem Systeme von Kräften können daher nicht zwei Resultanten zukommen, die, auf denselben Punkt wirkend, an Intensität oder Richtung verschieden wären. Und eben so müssen zwei Kräfte, deren jede auf denselben Punkt wirkend mit demselben Systeme das Gleichgewicht hält, gleiche Intensität und einerlei Richtung haben.*

§. 8.

Aus jedem Systeme von mehr als zwei Kräften, welche im Gleichgewichte sind, lassen sich immer auf mehrfache Weise zwei gleichwirkende Systeme bilden, indem man zu dem einen System einen beliebigen Theil der Kräfte des anfänglichen Systems nach entgegengesetzten Richtungen nimmt, und das andere System aus den übrigen Kräften mit nicht veränderten Richtungen bestehen lässt. Man kann daher die Statik auch als die Wissenschaft betrachten, welche lehrt,

unter welchen Bedingungen zwei Systeme von Kräften gleiche Wirkung mit einander haben, und wie ein gegebenes System in ein anderes von gleicher Wirkung verwandelt werden kann, — auf ähnliche Art wie die mathematische Analysis in Bezug auf Grössen überhaupt die aus ihnen zusammengesetzten Ausdrücke mit einander vergleichen und umformen lehrt.

Sind aber zwei Systeme in statischer Rücksicht von einerlei Wirkung, so sind sie es auch in dynamischer, d. h. sie bringen einerlei Bewegung hervor, wie dies ganz leicht mit Zuziehung des Grundsatzes erhellet, dass die Bewegung eines Körpers durch Hinzufügung oder Wegnahme von Kräften, die unter sich im Gleichgewichte sind, nicht geändert wird. Die Statik ist hiernach die nothwendige Vorbereitungswissenschaft zu der Bewegungslehre oder Dynamik, indem sie die vorgegegebenen Kräfte dergestalt mit einander verbinden, oder in andere verwandeln lehrt, dass daraus mittelst der Principien der Dynamik die bewirkten Bewegungen am einfachsten hergeleitet werden können.

§. 9.

V. Grundsatz. Wenn Kräfte in beliebiger Anzahl einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt haben und nicht im Gleichgewichte sind, so kann dieses immer durch Hinzufügung einer neuen auf denselben Punkt wirkenden Kraft hergestellt werden; oder:

Ein System von Kräften, die auf einen und denselben Punkt wirken und nicht im Gleichgewichte sind, hat eine auf denselben Punkt wirkende Resultante.

Zusätze. *a.* Die Richtung und Stärke jener das Gleichgewicht haltenden Kraft oder dieser Resultante ist aus den Kräften des Systems nur auf eine Weise bestimmbar (§. 7.). Fallen daher die Richtungen sämmtlicher Kräfte in dieselbe gerade Linie, so ist darin auch die Richtung ihrer Resultante enthalten, indem sonst, wenn die Resultante mit dieser Linie einen Winkel bildete, jede andere Gerade, welche mit der Linie denselben Winkel macht, die Richtung der Resultante seyn könnte.

b. Aus gleichem Grunde ist von zwei Kräften p und q, die einerlei Angriffspunkt A (Fig. 1.) haben und mit einander einen Winkel bilden, die ihnen das Gleichgewicht haltende Kraft r, folglich auch ihre Resultante, in der Ebene des Winkels enthalten. Denn seyen AP, AQ, AR die Richtungen von p, q, r, so müssen, auch wenn diese Linien über A hinaus nach P', Q', R' verlängert werden, die Kräfte p, q, r nach den Richtungen AP', AQ', AR' im Gleichgewichte seyn (§. 5. *b.*). Man drehe nun das System letzterer drei Richtungen in der Ebene des Winkels $P'AQ'$ um A herum, bis AP' in AP fällt, so fällt AQ' in AQ; AR' aber muss in AR fallen, indem, wenn AR' nicht die Richtung AR, sondern irgend eine andere AS erhielte, die nach AP und AQ wirkenden Kräfte p und q sowohl durch eine nach AR als durch eine nach AS gerichtete Kraft in's Gleichgewicht gebracht werden könnten, welches nicht möglich ist. (§. 7.). Die Richtung AR' fällt aber nach der Drehung ersichtlich nur dann, und dann immer, mit AR zusammen, wenn AR in der Ebene PAQ enthalten ist.

c. Sind zwei auf einen Punkt A wirkende Kräfte p und q einander gleich, so wird der Winkel ihrer Richtungen AP und AQ von ihrer Resultante halbirt,

Denn man vertausche die Kräfte, indem man p nach AQ und q nach AP wirken lässt, so wird die Resultante nunmehr mit AQ denselben Winkel machen, den sie vorher mit AP bildete. Da aber p und q einander gleich sein sollen, so ist durch diese Vertauschung das System der beiden Kräfte, folglich auch ihre Resultante, unverändert geblieben. Die Resultante muss daher mit AP und AQ gleiche Winkel machen, d. i. den Winkel PAQ halbiren.

§. 10.

VI. Grundsatz. Zwischen Kräften, die auf einen und denselben Punkt nach einerlei Richtung wirken, giebt es kein Gleichgewicht. — Die ihnen das Gleichgewicht haltende Kraft hat daher die entgegengesetzte Richtung, und ihre Resultante mit ihnen selbst einerlei Richtung.

VII. Grundsatz. Wenn die Richtungen zweier auf einen Punkt wirkenden Kräfte einen Winkel bilden, so fällt die Richtung der Kraft, welche zum Gleichgewichte erforderlich ist, in den Scheitelwinkel, also die Richtung der Resultante in den Winkel selbst.

§. 11.

Die Intensität einer Kraft nennt man das Doppelte, Dreifache u. s. w. der Intensität einer andern Kraft, oder geradezu die eine Kraft das Doppelte, Dreifache u. s. w. der andern, wenn sie von zwei, drei u. s. w. Kräften, welche einzeln der andern gleich sind und auf einen Punkt nach einerlei Richtung wirken, die Resultante ist.

Zwei Kräfte P und Q, sagt man hiernach, verhalten sich wie die ganzen Zahlen p und q, wenn es eine

dritte Kraft giebt, von welcher P das $p$fache und Q das $q$fache ist; oder was auf dasselbe hinauskommt: wenn das $q$fache von P dem $p$fachen von Q gleich ist. Weil aber Kräfte auch in irrationalen Verhältnissen zu einander stehen können, so stellen wir noch folgende Definition des Verhältnisses zwischen Kräften auf, die der bekannten Euklidischen Definition des Verhältnisses zwischen Grössen überhaupt, nachgebildet ist:

Zwei Kräfte P und Q verhalten sich wie die Zahlen p und q, wenn von beliebigen Gleichvielfachen, die man von P und p, und beliebigen Gleichvielfachen, die man von Q und q nimmt, das Vielfache von p dem Vielfachen von q gleich, oder kleiner, oder grösser als dasselbe ist, je nachdem die Vielfachen von P und Q, wenn man beide nach entgegengesetzten Richtungen auf einen Punkt wirken lässt, sich entweder das Gleichgewicht halten, oder man in der Richtung des Vielfachen von P, oder des Vielfachen von Q eine Kraft hinzuzufügen nöthig hat, um Gleichgewicht hervorzubringen.

Hiernach kann das Verhältniss zweier Kräfte P und Q stets durch Zahlen, und dieses so genau, als man will, bestimmt werden. Sei nämlich $P = Q + Z$, wo $Q + Z$ einstweilen noch nicht die Summe, sondern die Resultante zweier nach einerlei Richtung wirkender Kräfte Q und Z bezeichnen soll, so dass in Folge der gesetzten Gleichung auf der Seite von Q noch eine Kraft Z angebracht werden muss, um der Kraft P auf der andern Seite das Gleichgewicht zu halten. Man nehme nun von P irgend ein Vielfaches nP, und von Q, wenn es möglich ist, ein Vielfaches mQ, welches dem nP gleich ist, und es werden sich die Kräfte P und Q wie die Zahlen m und n verhalten. Giebt

es aber kein dem nP gleiches Vielfaches von Q, so lässt sich doch immer von Q ein solches Vielfaches mQ nehmen, dass mit Anwendung der vorigen Bezeichnungsart 1) $nP = mQ + X$ und 2) $nP + Y = (m+1)Q$ ist. Verhalten sich nun P und Q, wie die Zahlen p und q, so muss, zufolge der Definition, wegen 1), $np > mq$, und wegen 2), $np < (m+1)q$ seyn. Das gesuchte Verhältniss $p:q$ ist daher zwischen den zwei Verhältnissen $m:n$ und $m+1:n$ enthalten, deren Unterschied desto kleiner, kleiner als jede angebbare Grösse, wird, je grösser man n, und folglich auch m, nimmt.

§. 12.

So wie auf diese Weise das Verhältniss je zweier Kräfte numerisch bestimmt werden kann, so ist auch umgekehrt, wenn von zwei Kräften ihr numerisches Verhältniss und die eine gegeben ist, auch die andere gegeben. Von zwei oder mehrern Kräften werden daher alle bestimmt seyn, wenn es nur eine derselben unmittelbar ist, für jede andere aber ihr Verhältniss zu jener bestimmt ist. Man pflegt hiernach eine gewisse Kraft als Einheit anzunehmen und jede andere Kraft durch die Zahl auszudrücken, die sich eben so zu der numerischen Einheit, wie letztere Kraft zu der als Einheit festgesetzten Kraft verhält.

Wenn daher in dem Folgenden von der Summe oder dem Unterschiede zweier Kräfte die Rede seyn wird, so ist darunter nichts anderes, als die Kraft zu verstehen, deren Zahl der Summe oder dem Unterschiede der den erstern Kräften zugehörigen Zahlen gleich ist. Eben so wird eine Kraft kleiner, als eine andere, genannt werden, wenn die Zahl der erstern

kleiner, als die der letztern ist, oder, was nach obiger Definition des Verhältnisses dasselbe aussagt: wenn die erstere erst in Verbindung mit einer andern nach derselben Richtung wirkenden Kraft mit der andern gleiche Wirkung erhält. Denn die gewöhnliche Erklärung, wonach eine Grösse kleiner, als eine andere, heisst, wenn sie einem Theile der andern gleich ist, kann auf Kräfte nicht angewendet werden, da Kräfte, als intensive Grössen, nicht, gleich den extensiven, aus unterscheidbaren Theilen zusammengesetzt sind.

Sehr vortheilhaft kann man in der Statik die Kräfte auch durch Linien ausdrücken. Ist nämlich A der Angriffspunkt einer Kraft, so trage man nach der Richtung zu, in welcher sie wirkt, eine ihrer Intensität proportionale Linie AB, d. i. eine Linie, welche in demselben Verhältniss zu der als Linieneinheit angenommenen Länge steht, als die Kraft zu der Einheit der Kräfte; und auf diese Weise wird mit der Linie AB der Angriffspunkt, die Richtung und die Intensität der Kraft zugleich vorgestellt.

§. 13.

Lehrsatz. Die Resultante zweier auf einen Punkt nach einerlei Richtung wirkenden Kräfte P und Q ist der Summe derselben gleich.

Beweis. Verhalten sich P und Q wie zwei ganze Zahlen p und q, giebt es also eine Kraft U, von welcher P das $p$fache und Q das $q$fache ist, so kann man statt P, p Kräfte, und statt Q, q Kräfte, deren jede $= U$ ist und nach derselben Richtung wie P oder Q wirkt, setzen. Von diesen $p+q$ Kräften mit einerlei Richtung ist aber die Resultante das $(p+q)$fache von

U, oder die Kraft $p+q$, wenn P und Q durch die ihnen proportionalen Zahlen p und q ausgedrückt werden.

Dasselbe erhellet auch daraus, dass, wenn sich $P:Q=p:q$ verhält, das $q$fache von P, oder qP, mit pQ, also auch pP und qP nach einerlei Richtung mit pP und pQ nach einerlei Richtung, d. i. das $(p+q)$fache von P mit dem $p$fachen der Resultante von P und Q ins Gleichgewicht gebracht werden kann, und dass sich daher diese Resultante zu der Kraft P wie $p+q$ zu p verhält.

Lässt sich das Verhältniss zwischen P und Q nicht durch ganze Zahlen ausdrücken, so ist der Beweis mit Anwendung der Grenzverhältnisse zu führen, oder auf ähnliche Art, wie Euklides in seiner Lehre von den Verhältnissen zu Werke geht, was ich aber, um Weitläufigkeit zu vermeiden, hier unterlasse.

Zusatz. Auf ganz ähnliche Weise ergiebt sich, dass auch von drei oder mehrern Kräften, welche auf einen Punkt nach einerlei Richtung wirken, die Resultante ihrer Summe gleich ist; dass von zwei einander nicht gleichen Kräften, welche auf einen Punkt nach entgegengesetzten Richtungen wirken, die Resultante der Unterschied der beiden Kräfte ist und die Richtung der grössern hat; dass von mehrern an einem Punkte angebrachten Kräften, welche in derselben Linie zum Theil nach einerlei, zum Theil nach entgegengesetzten Richtungen wirken, und deren je zwei, wenn sie entgegengesetzte Richtungen haben, mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden, die Resultante der algebraischen Summe der Kräfte gleich ist, und nach der Richtung derjenigen Kräfte wirkt, mit denen sie einerlei Zeichen hat; dass endlich, wenn diese algebraische Summe sich Null findet, Gleichgewicht herrscht.

§. 14.

VIII. Grundsatz. **Zwei Kräfte, welche auf zwei Punkte eines frei beweglichen festen Körpers wirken, sind nur dann, und dann immer, im Gleichgewichte, wenn sie gleiche Intensitäten und einander gerade entgegengesetzte Richtungen haben**, so dass letztere in die, die beiden Punkte verbindende, Gerade selbst fallen.

Folgerungen. *a.* Sind zwei Kräfte auf die besagte Art im Gleichgewichte, und wird von einer derselben die Richtung in die entgegengesetzte verwandelt, so hat man zwei Kräfte, die gleiche Intensität und einerlei Richtung haben und nach §. 6. gleichwirkend sind. Die Wirkung einer Kraft wird daher nicht geändert, wenn man zu ihrem Angriffspunkt einen beliebigen andern Punkt ihrer Richtung wählt, der mit dem anfänglichen fest verbunden ist; oder, wie man sich kurz auszudrücken pflegt: *eine Kraft kann ohne Aenderung ihrer Wirkung auf jeden Punkt ihrer Richtung verlegt werden.*

b. Es wird daher auch das Gleichgewicht eines Systems von Kräften nicht gestört und überhaupt die Wirkung eines Systems nicht geändert werden, wenn man die Intensität und Richtung jeder Kraft ungeändert lässt, für den Angriffspunkt aber irgend einen andern mit dem erstern fest verbundenen Punkt ihrer Richtung nimmt; mit andern Worten: die Wirkung einer Kraft auf einen festen Körper ist schon genugsam durch die Richtung und Intensität der Kraft bestimmt, indem für ihren Angriff jeder Punkt des innerhalb des Körpers fallenden Theiles ihrer Richtung genommen werden kann.

c. Der Satz, dass auf einen Punkt wirkende Kräfte eine auf denselben Punkt wirkende Resultante haben,

lässt sich hiernach allgemeiner also ausdrücken: Zwei oder mehrere Kräfte, deren Richtungen sich in einem Punkte schneiden, haben eine durch denselben Punkt gehende Resultante.

d. Eben so gilt Alles, was im vorigen §. von Kräften erwiesen wurde, die einerlei Angriffspunkt und in dieselbe Gerade fallende Richtungen haben, auch dann schon, wenn bloss die letztere Bedingung erfüllt ist. *Unter der Voraussetzung also, dass je zwei Kräfte, deren Richtungen einander entgegengesetzt sind, mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden, ist von zwei oder mehrern Kräften, von denen die Richtungen (und mithin auch die Angriffspunkte) in dieselbe Gerade fallen, die Resultante gleich der Summe der Kräfte und die Richtung der Resultante einerlei mit der Richtung derjenigen Kräfte, mit denen sie einerlei Zeichen hat; ihr Angriffspunkt aber kann willkührlich in der Geraden genommen werden. Ist die Summe der Kräfte null, so sind sie im Gleichgewichte.*

Zweites Kapitel.

Vom Gleichgewichte zwischen Kräftepaaren in einer Ebene.

§. 15.

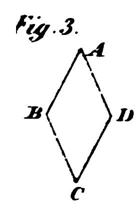
Fig. 2. A p q r R P Q A' p' q' r' R' Q'

Seyen p und q zwei auf einen Punkt A (Fig. 2.) nach den Richtungen AP und AQ wirkende Kräfte, r ihre Resultante, deren Richtung AR in die Ebene PAQ fällt (§. 9. *b.*). Die Intensität dieser Resultante

und die Winkel ihrer Richtung mit den Richtungen von p und q können von nichts Anderem, als den Intensitäten und dem Winkel der Richtungen von p und q abhängig seyn. Bringt man daher an irgend einem anderen Punkte A' zwei den p und q resp. gleiche Kräfte p' und q' nach Richtungen $A'P'$ und $A'Q'$ an, die mit AP und AQ parallel sind, so wird die Resultante r' von p' und q' der r gleich seyn und eine mit AR parallele Richtung $A'R'$ haben. Ist dabei A' ein Punkt der AR selbst, wie in der Figur, so fallen die Richtungen AR und $A'R'$ zusammen, und die beiden Resultanten r und r' werden gleichwirkend (§. 14. *a.*), also auch p' und q' gleichwirkend mit p und q. Lassen wir folglich die Kräfte p' und q' nach den entgegengesetzten Richtungen $P'A'$ und $Q'A'$ wirken, so sind sie mit p und q zusammen im Gleichgewichte. Zwei Kräfte, deren Richtungen sich schneiden (vergl. §.14. *b.*), kommen demnach ins Gleichgewicht, wenn durch einen Punkt ihrer Resultante zwei ihnen resp. gleiche, parallele und entgegengesetzte Kräfte gelegt werden; woraus wir weiter schliessen:

1) Zwei sich schneidende Kräfte (p, q) und eine dritte (p'), der einen (p) von ihnen gleiche, parallele und entgegengesetzte Kraft können nicht im Gleichgewichte seyn, indem dieses erst dann entsteht, wenn durch den Punkt, in welchem die dritte (p') die Resultante (r) der beiden erstern schneidet, eine vierte, der andern (q) jener beiden gleiche, parallele und entgegengesetzte Kraft (q') gelegt wird.

Die Richtungen von p, q, p', q' bilden hierbei ein Parallelogramm, in dessen eine Diagonale die Richtungen der Resultanten r und r' fallen. Ist nun noch $p = q$, also auch $= p' = q'$, so halbirt jene diagonale Richtung die Winkel von q mit p und von q' mit p' (§. 9. *c.*),



und das Parallelogramm wird ein Rhombus, welches folgenden Satz giebt:

2) Sind A, B, C, D (Fig. 3.) die vier auf einander folgenden Ecken eines Rhombus, so halten sich vier einander gleiche nach AD, AB, CB, CD gerichtete Kräfte das Gleichgewicht.

§. 16.

Um die Ergebnisse des vorigen §. einfacher ausdrücken und damit bequemer benutzen zu können, nenne man zwei einander gleiche nach parallelen, aber entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräfte ein **Kräftepaar** oder schlechthin ein **Paar**. Der gegenseitige Abstand der beiden Richtungen, oder das von irgend einem Punkte der einen Richtung auf die andere gefällte Perpendikel, heisse die **Breite** des Paares. Zwei Paare nenne man einander **gleich**, wenn die zwei Kräfte und die Breite des einen Paares den zwei Kräften und der Breite des andern gleich sind.

Denkt man sich auf der Ebene des Paares zwischen den beiden Kräften stehend, und erscheint dann die eine Kraft, nach welcher man das Auge gewendet hat, von der Rechten nach der Linken, (oder von der Linken nach der Rechten) gerichtet, so wird nach einer halben Drehung des Auges um eine auf der Ebene normale Axe auch die andere Kraft in dieser Richtung erscheinen. Man sage alsdann: das Kräftepaar habe einen **Sinn** von der Rechten nach der Linken (oder von der Linken nach der Rechten). Auch kann man den einen Sinn, etwa den von rechts nach links, den **positiven** und den andern den **negativen** Sinn nennen. Hiernach verstehe man auch den Ausdruck: zwei Paare in einer Ebene, — oder auch in zwei par-

allelen Ebenen, — haben einerlei, oder sie haben entgegengesetzten Sinn. — Der so erklärte Sinn eines Paares ist übrigens zugleich mit demjenigen einerlei, nach welchem jede der beiden Kräfte den Körper, worauf sie wirken, zu drehen strebt, wenn dieser an einer auf der Ebene der Kräfte normalen und zwischen ihnen hindurch gehenden Axe befestigt ist.

§. 17.

Von den vier einander gleichen Kräften in dem 2. Satze des §. 15. bilden demnach die nach AD und CB (Fig. 3.) gerichteten ein Paar, und die nach AB und CD gerichteten ein zweites von entgegengesetztem Sinne. Beide Paare aber sind einander gleich, da die vier Kräfte es sind, und zwei einander gegenüberliegende Seiten eines Rhombus eben so weit von einander entfernt sind, als die beiden andern Seiten. Da nun auch umgekehrt die Richtungen der vier Kräfte zweier einander gleichen Paare in einer Ebene, den einzigen Fall ausgenommen, wenn sämmtliche vier Richtungen einander parallel sind, einen Rhombus bilden, so können wir mit einstweiliger Beseitigung dieses Falles, den obigen Satz also ausdrücken:

Zwei Paare in einer Ebene, die einander gleich und von entgegengesetztem Sinne sind, halten einander das Gleichgewicht; — folglich auch nach §. 6., wenn man die Richtungen der Kräfte des einen Paares in die entgegengesetzten verwandelt:

Zwei Paare in einer Ebene, die einander gleich und von einerlei Sinne sind, haben gleiche Wirkung; — oder was dasselbe aussagt:

Ein Paar kann in seiner Ebene, ohne Aenderung seiner Wirkung, wohin man will, verlegt werden.

Was noch den hierbei beseitigten Fall anlangt, wenn die Kräfte der zwei einander gleichen Paare einander parallele Richtungen haben, so denke man sich noch ein drittes Paar hinzu, das mit jenen zweien in einer Ebene liegt, jedem derselben gleich ist, mit ihnen einerlei Sinn hat, und dessen Kräfte die Kräfte der erstern unter einem beliebigen Winkel schneiden. Vermöge des vorhin Erwiesenen ist nun dieses dritte Paar mit jedem der beiden erstern gleichwirkend; mithin sind auch die beiden erstern selbst von gleicher Wirkung, und der aufgestellte Satz gilt daher ohne Beschränkung.

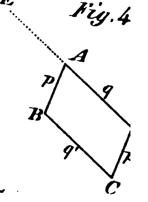
§. 18.

Aus dem 1. Satze in §. 15. folgern wir:

Zwischen drei Kräften (p, p', q) in einer Ebene, von denen zwei (p, p') ein Paar bilden, kann kein Gleichgewicht bestehen. Wohl aber kann dieses durch Hinzufügung einer vierten Kraft (q') hergestellt werden, welche mit derjenigen (q) der drei Kräfte, die nicht zum Paare gehört, ein zweites in derselben Ebene gelegenes Paar, mit einem dem erstern entgegengesetzten Sinne, ausmacht; oder mit Berücksichtigung von §. 6.:

Sind in einer Ebene ein Paar und eine einzelne Kraft gegeben, so lässt sich letztere durch eine noch andere Kraft in der Ebene zu einem Paare ergänzen, welches mit dem gegebenen Paare einerlei Wirkung hat. Dieses zweite Paar aber muss mit dem gegebenen, wenn es ihm gleichwirkend seyn soll, einerlei Sinn haben.

Dass, wie hier hinzugesetzt wurde, zwei sich das Gleichgewicht haltende Paare von entgegengesetztem, und folglich zwei gleichwirkende von einerlei Sinne seyn müssen, erhellet leicht mittelst des VII. Grund-



satzes in §. 10. Ist nämlich $ABCD$ (Fig. 4.) das von den zwei Paaren p, p' und q, q' gebildete Parallelogramm, und AB die Richtung von p, so ist CD die Richtung von p'; und die zwei Paare sind von einerlei oder entgegengesetztem Sinne, nachdem DA oder AD die Richtung von einer der beiden Kräfte des andern Paares, etwa von q, ist. Sollen nun die Paare im Gleichgewichte seyn, und wäre q nach DA oder AE gerichtet, wo E einen Punkt in der Verlängerung von DA über A bezeichnet, so würde nach jenem Grundsatze die durch A gehende Resultante von p und q innerhalb des Winkels BAE liegen, könnte also nicht dem innerhalb des Winkels BAD fallenden Durchschnitte C von p' und q' begegnen, wie doch zum Gleichgewicht erforderlich ist (§. 15.). Diese Begegnung wird aber möglich, sobald AD die Richtung von q ist, und mithin die Resultante von p und q innerhalb des Winkels BAD fällt.

Noch ist zu bemerken, dass zufolge des 1. Satzes in §. 15., von welchem der obige nur ein anderer Ausdruck ist, die gegebene einzelne Kraft q die Kräfte p, p' des gegebenen Paares jedenfalls schneiden sollte. Statt dessen ist hier bloss gesetzt worden, dass q mit p und p' in einer Ebene liege, indem der Fall, wenn q mit p und p' parallel ist, durch Verlegung des Paares p, p' in seiner Ebene, so dass es eine gegen q geneigte Lage erhält, auf den in §. 15. vorausgesetzten Fall zurückgeführt wird.

Zusatz. Dass mit zwei Kräften p, p', welche ein Paar ausmachen, eine dritte in der Ebene des Paares enthaltene Kraft q nicht im Gleichgewichte seyn und folglich auch nicht gleiche Wirkung haben kann, dies erhellet schon daraus, dass jede in der Ebene von p, p'

enthaltene mit der Richtung von q parallele Gerade gegen p und p' vollkommen dieselbe Lage, wie q, hat, und dass daher eine der q gleiche, nach irgend einer dieser Richtungen wirkende Kraft mit p und p' ebenfalls im Gleichgewichte seyn müsste, wenn q es wäre. Eine solche Kraft müsste daher mit q selbst gleiche Wirkung haben, welches nicht möglich ist (§. 14.).

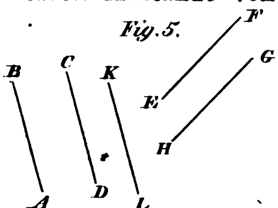
Auf eben die Weise zeigt sich, dass auch keine nicht in der Ebene eines Paares p, p' wirkende und mit dessen Kräften nicht parallele Kraft q mit ihm im Gleichgewichte seyn kann. Denn jede mit q parallele und in der durch q mit p und p' parallel gelegten Ebene enthaltene Richtung hat gegen p und p' vollkommen dieselbe Lage, welche q hat.

Ist endlich q mit p und p' parallel, so kann man immer noch eine Richtung angeben, die gegen p' und p ganz dieselbe Lage hat, welche q gegen p und p' hat; und *es ist* daher *in jedem Falle das Gleichgewicht oder die gleiche Wirkung einer einzigen Kraft mit den Kräften eines Paares unmöglich.*

§. 19.

Aus dem Satze von der Verlegung eines Paares (§. 17.) lassen sich mehrere für das Folgende sehr wichtige Schlüsse ziehen.

a. Indem wir Kräfte ihrer Intensität und Richtung nach durch gerade Linien darstellen (§. 12.), seyen AB, CD und EF, GH (Fig. 5.) zwei Paare in einer Ebene, die einerlei Sinn haben, und deren Kräfte sämmtlich einander gleich sind. Auf der Seite von CD, welche derjenigen, auf welcher AB liegt, entgegengesetzt ist, ziehe man KL gleich und parallel mit CD und in demselben Abstande von CD, welchen



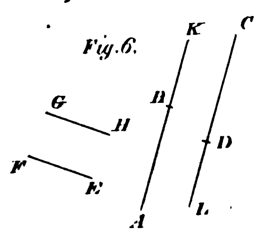
GH von ***FE*** hat. Alsdann ist das Paar ***EF***, ***GH*** gleichwirkend mit dem Paare ***DC***, ***KL***, und folglich die Paare ***AB***, ***CD*** und ***EF***, ***GH*** zusammen gleichwirkend mit ***AB***, ***CD***, ***DC***, ***KL***, d. i. mit dem Paare ***AB***, ***KL***. Statt zweier Paare in einer Ebene, die einerlei Sinn und gleiche Kräfte haben, kann man daher ein einziges Paar mit demselben Sinne und denselben Kräften setzen, dessen Breite der Summe der Breiten der erstern Paare gleich ist.

Es erhellet ohne weitere Erörterung, dass sich auf gleiche Weise drei und mehrere in einer Ebene gelegene Paare von einerlei Sinne und von insgesammt einander gleichen Kräften zu einem Paare verbinden lassen, dessen Kräfte und Sinn dieselben, wie bei den zu verbindenden Paaren sind, und dessen Breite der Summe der Breiten dieser Paare gleich ist.

Sind von den zu verbindenden Paaren auch die Breiten einander gleich, so haben wir folgenden Satz:

Ein Paar, dessen Kräfte denen eines andern Paares gleich sind, und dessen Breite irgend ein Vielfaches der Breite des andern ist, hat gleiche Wirkung mit eben so viel in seiner Ebene und mit ihm nach einerlei Sinn wirkenden Paaren, deren jedes dem andern gleich ist.

b. Auf ähnliche Art, wie Paare mit gleichen Kräften, lassen sich auch Paare, die einander gleiche Breiten haben, zusammensetzen. Seyen ***AB***, ***CD*** und ***EF***, ***GH*** (Fig. 6.) zwei dergleichen, die in einer Ebene liegen und einerlei Sinn haben. Man mache in den Richtungen von ***AB*** und ***CD*** resp. ***BK*** und ***DL*** den Kräften des andern Paares ***EF*** und ***GH*** gleich, so sind wegen der noch hinzukommenden gleichen Breiten die Paare ***BK***, ***DL*** und ***EF***, ***GH*** gleichwirkend, also die Paare ***AB***, ***CD*** und ***EF***, ***GH*** zusammen gleich-



wirkend mit *AB*, *BK*, *CD*, *DL*, d. i. mit *AK*, *CL* (§. 14. *d.*), also mit einem Paare, welches denselben Sinn und dieselbe Breite, wie die beiden erstern Paare, hat, und dessen Kräfte der Summe der Kräfte der erstern Paare gleich sind.

Eben so sind drei und mehrere Paare, die in einer Ebene liegen und einerlei Sinn und gleiche Breiten haben, gleichwirkend mit einem einzigen Paare von demselben Sinne und derselben Breite, dessen Kräfte die Summen der Kräfte der erstern Paare sind.

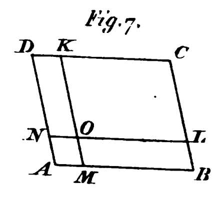
Wenn daher von zwei Paaren, die gleiche Breiten haben, die Kräfte des einen beliebige Vielfache der Kräfte des andern sind, so ist das erstere gleichwirkend mit eben so viel dem andern gleichen Paaren, die in der Ebene des erstern liegen und mit ihm einerlei Sinn haben.

§. 20.

Lehrsatz. Sind *A*, *B*, *C*, *D* (Fig. 7.) die vier auf einander folgenden Ecken eines Parallelogramms, so haben die durch *AB*, *CD* und *BC*, *DA* dargestellten Paare gleiche Wirkung.

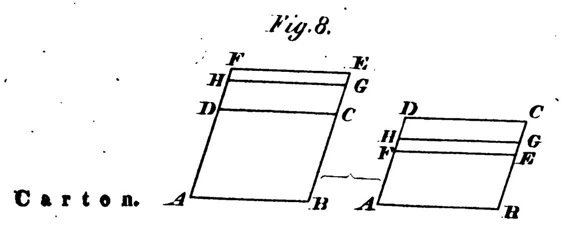
Beweis. In dem besondern Falle, wenn das Parallelogramm ein Rhombus ist, folgt der Beweis schon aus §. 15. 2.

Seyen ferner die anliegenden Seiten *AB*, *AD* überhaupt in einem rationalen Verhältnisse zu einander, und *m*, *n* die ganzen Zahlen, durch welche dieses Verhältniss ausgedrückt werden kann. Man nehme in *AB* von *A* nach *B* zu einen Abschnitt *AM* = dem *m*ten Theile von *AB*, und in *AD* von *A* nach *D* zu einen Abschnitt *AN* = dem *n*ten Theile von *AD*, so ist *AM* = *AN*, und wenn man durch *M*, *N* Paralle-



len mit AD, AB zieht, welche DC, BC in K, L, sich selbst aber in O schneiden, so ist $AMON$ ein Rhombus. Hiernach ist die Breite des Paares AB, CD das $n$fache der Breite des Paares AB, LN, und die Kräfte des letztern sind die $m$fachen von AM, ON. Nach §. 19. a. ist folglich das Paar AB, CD gleichwirkend mit dem $n$fachen des Paares AB, LN, d. i. mit n Paaren, deren jedes dem AB, LN gleich ist und mit ihm einerlei Sinn hat. Das Paar AB, LN aber ist gleichwirkend mit dem $m$fachen des Paares AM, ON (§. 19. b.); folglich AB, CD gleichwirkend mit dem $n.m$fachen von AM, ON. Auf gleiche Art zeigt sich durch Vermittelung des Paares MK, DA, dass das Paar BC, DA mit dem $m.n$fachen des Paares MO, NA gleiche Wirkung hat. Da aber $AMON$ ein Rhombus ist, so sind die Paare AM, ON und MO, NA selbst von gleicher Wirkung, folglich auch die $m.n$fachen derselben, d. i. die Paare AB, CD und BC, DA.

Ist endlich das Verhältniss $AB:AD$ (Fig. 8.) irrational, und wäre nicht AB, CD gleichwirkend mit BC, DA, so müsste sich AB durch eine andere Kraft zu einem Paare ergänzen lassen, das mit BC, DA gleiche Wirkung hätte (§. 18.). Diese andere Kraft würde daher durch eine zwischen den Parallelen BC, AD enthaltene und mit CD parallele Linie EF dargestellt werden können, die, weil das Paar AB, EF, eben so wie AB, CD, mit BC, DA einerlei Sinn haben muss (ebend.), mit CD auf einerlei Seite von AB liegen müsste. Sey nun G ein zwischen C und E so gelegener Punkt, dass BG zu AB in einem rationalen Verhältnisse steht. Man ziehe durch G eine Parallele mit CD, welche AD in H schneide, so sind



nach dem Vorigen die Paare *AB*, *GH* und *BG*, *HA* mit einander gleichwirkend, oder, was dasselbe ist, die Paare *AB*, *EF* und *FE*, *GH* zusammen von gleicher Wirkung mit den Paaren *BC*, *DA* und *CG*, *HD* in Vereinigung. Nach der Voraussetzung aber soll *AB*, *EF* mit *BC*, *DA* gleichwirkend seyn, mithin müsste es auch *FE*, *GH* mit *CG*, *HD* seyn, welches nicht möglich ist, da letztere zwei Paare von entgegengesetztem Sinne sind.

§. 21.

Lehrsatz. Zwei Paare in einer Ebene, die einerlei Sinn haben, und deren Kräfte sich umgekehrt wie ihre Breiten verhalten, sind von gleicher Wirkung.

Weil ein Paar in seiner Ebene beliebig verlegt werden kann, so lässt sich immer annehmen, dass die Kräfte des einen der beiden Paare die des andern schneiden, und dass folglich die Richtungen der vier Kräfte ein Parallelogramm *ABCD* (Fig. 8.) bilden. Seyen demnach *AB*, *CD* die Richtungen der Kräfte des einen Paares, und, weil beide Paare einerlei Sinn haben sollen, *BC*, *DA* die Richtungen der Kräfte des andern. Aus der Geometrie ist aber bekannt, dass sich zwei an einander stossende Seiten *AB*, *BC* eines Parallelogramms umgekehrt wie ihre Abstände von den gegenüberliegenden Seiten, also umgekehrt wie die Breiten der Paare *AB*, *CD* und *BC*, *DA*, verhalten. Da nun in demselben Verhältnisse die Kräfte der beiden Paare stehen sollen, und da wegen der willkührlichen Annahme der Länge, durch welche die Krafteinheit ausgedrückt wird, die Linien *AB*, *CD* die Kräfte des einen Paares selbst vorstellen können,

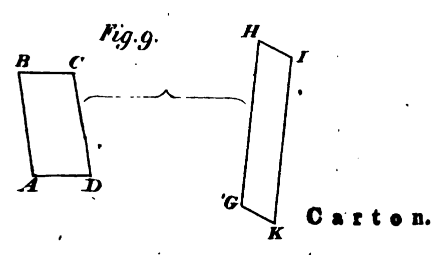
so sind alsdann die Kräfte des andern durch *BC*, *DA* auszudrücken. Dass aber die Kräfte *AB*, *CD* mit den Kräften *BC*, *DA* gleiche Wirkung haben, ist in §. 20. dargethan worden.

Zusatz. Wenn in den zwei in einer Ebene liegenden Parallelogrammen *AC* und *GI* (Fig. 9.) eine Seite *AB* des einen und eine Seite *GH* des andern sich umgekehrt wie ihre Abstände von den gegenüberliegenden Seiten verhalten, so sind nach dem jetzt Erwiesenen die Paare *AB*, *CD* und *GH*, *IK* von gleicher Wirkung. Unter der gemachten Voraussetzung sind aber die Parallelogramme *AC* und *GI* bekanntlich von gleichem Inhalte, und umgekehrt, und wir können daher den jetzigen Satz sehr einfach auch folgendergestalt in Worte fassen:

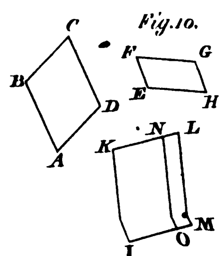
Sind zwei Paare in einer Ebene von einerlei Sinne, und haben die durch sie bestimmten Parallelogramme gleichen Inhalt, so sind die Paare gleichwirkend.

§. 22.

Folgerungen. Sind *AB*, *CD* und *EF*, *GH* (Fig. 10.) zwei Paare in einer Ebene, die einerlei Sinn haben, und construirt man in ihrer Ebene ein Parallelogramm *IKLM*, dessen Fläche der Summe der Flächen der Parallelogramme *AC* und *EG* gleich ist, so wird das Paar *IK*, *LM*, von dem ich annehme, dass es mit erstern Paaren einerlei Sinn hat, mit ihnen auch gleiche Wirkung haben. Denn theilt man das Parallelogramm *IL* durch eine mit *IK* gezogene Parallele *ON* in zwei Parallelogramme *IN* und *OL*, so dass $IN = AC$ und folglich $OL = EG$ ist, so sind (§. 21.) die Paare *AB*, *CD* und *EF*, *GH* resp. gleichwirkend mit den



Carton.



Paaren *IK*, *NO* und *ON*, *LM*, d. i. mit dem Paare *IK*, *LM*.

Man sieht nun leicht, dass auf gleiche Weise auch drei und mehrere Paare in einer Ebene, die von einerlei Sinne sind, sich zu einem Paare vereinigen lassen. Man verzeichne nämlich in ihrer Ebene ein Parallelogramm, welches der Summe der Parallelogramme, die von den zusammenzusetzenden Paaren gebildet werden, gleich ist, und es wird das durch dieses Parallelogramm bestimmte Paar, so genommen, dass es mit den gegebenen Paaren einerlei Sinn hat, das resultirende seyn.

Sollen zwei Paare *IK*, *LM* und *BA*, *DC* von entgegengesetztem Sinne verbunden werden, so construire man ein Parallelogramm *EFGH*, welches dem Unterschiede der Parallelogramme *IL* und *AC* gleich ist, und das durch *EG* so bestimmte Paar *EF*, *GH*, dass sein Sinn mit dem Sinne desjenigen *IK*, *LM* der zwei gegebenen Paare übereinkommt, dessen Parallelogramm das grössere ist, wird gleiche Wirkung mit den zwei gegebenen haben. Denn schneidet man von dem grössern Parallelogramme *IL* durch eine Parallele *ON* mit *IK* ein Parallelogramm *IN* ab, welches dem kleineren *AC* gleich ist, so ist der Rest *OL* = *EG* und *BA*, *DC* gleichwirkend mit *KI*, *ON*; folglich *IK*, *LM* und *BA*, *DC* zusammen gleichwirkend mit *ON*, *LM*, d. i. mit *EF*, *GH*.

Haben zwei Paare, die von entgegengesetztem Sinne sind, einander gleiche Parallelogramme, ist also der Unterschied der letztern null, so sind die Paare im Gleichgewichte, wie sogleich aus §. 21. in Verbindung mit §. 6. folgt. Aber auch umgekehrt können wir behaupten: Halten sich zwei Paare in einer Ebene

das Gleichgewicht, so sind sie von entgegengesetztem Sinne (§. 18.) und haben einander gleiche Parallelogramme. Denn fände zwischen letztern ein Unterschied statt, so wären die Paare gleichwirkend mit einem einzigen Paare, dessen Parallelogramm diesem Unterschiede gleich wäre, und würden mithin nicht im Gleichgewichte seyn. Sind folglich, — so können wir nach §. 6. noch schliessen, — zwei Paare in einer Ebene gleichwirkend mit einander, so sind sie von einerlei Sinne und haben einander gleiche Parallelogramme.

Wenn endlich, um noch den allgemeinsten Fall zu berücksichtigen, drei oder mehrere Paare in einer Ebene, die nicht von einerlei Sinne sind, zusammengesetzt werden sollen, so sondere man sie in zwei Gruppen, deren jede aus Paaren von einerlei Sinne besteht, und bestimme von jeder dieser Gruppen das resultirende Paar. Die Zusammensetzung dieser zwei Paare, welche von entgegengesetztem Sinne sind, giebt alsdann das resultirende Paar des ganzen Systems. Falls aber die zwei Paare sich das Gleichgewicht halten, so ist auch das ganze System im Gleichgewichte.

Eben so wenig, als ein einziges Paar, kann daher auch kein System von Paaren in einer Ebene mit einer einzigen Kraft gleiche Wirkung haben.

§. 23.

Das Product aus der einen der beiden Kräfte eines Paares in die Breite desselben, — dieses Product positiv oder negativ genommen, nachdem das Paar einen positiven oder negativen Sinn hat (§. 16.), — wird das Moment des Paares genannt. Das Moment ist daher nichts anderes, als der arithmetisch ausgedrückte Flächeninhalt des Parallelogramms, welches

von den geometrisch dargestellten Kräften des Paares gebildet wird, und wir können nach dem, was in den zwei vorigen §§. von diesen Parallelogrammen erwiesen worden, sogleich folgende Sätze aufstellen:

Zwei Paare in einer Ebene, welche einander (auch hinsichtlich der Zeichen) gleiche Momente haben, sind gleichwirkend; und umgekehrt: *Sind zwei Paare in einer Ebene von gleicher Wirkung, so haben sie gleiche Momente.*

Zwei oder mehrere Paare in einer Ebene haben gleiche Wirkung mit einem einzigen Paare in derselben Ebene, dessen Moment der (algebraischen) Summe der Momente ersterer Paare gleich ist. Ist aber diese Summe null, so halten sich die Paare das Gleichgewicht; woraus wir noch, in Verbindung mit dem vorigen Satze, umgekehrt schliessen:

Sind zwei oder mehrere Paare in einer Ebene gleichwirkend mit einem Paare in derselben Ebene, so ist die Summe der Momente der erstern gleich dem Momente des letztern. Sind aber die Paare im Gleichgewichte, so ist die Summe ihrer Momente null.

Die Resultate, zu denen die Theorie in einer Ebene wirkender Kräftepaare führt, sind hiernach ganz denen analog, welche hinsichtlich einfacher in einer Geraden wirkender Kräfte gelten. Eben so, wie eine einfache Kraft in der Geraden, worin sie wirkt, nach Belieben verlegt werden kann, so bleibt auch die Wirkung eines Paares unverändert, wenn nur seine Ebene und sein Moment sich nicht ändern; und eben so, wie die Summe der Intensitäten von Kräften, die in einer Geraden wirken, der Intensität der Resultante gleich ist, und letztere in derselben Geraden wirkt, so ist auch die Summe der Momente von Paaren in einer Ebene dem

Momente des resultirenden Paares gleich, und die Ebene desselben einerlei mit der Ebene der erstern. Der Geraden, in welcher eine einfache Kraft wirkt, ihrer Richtung in dieser Geraden und ihrer Intensität entspricht demnach bei einem Paare die Ebene, worin es enthalten ist, sein Sinn in dieser Ebene und sein Moment. Das Paar ist folglich ganz dasselbe für die Ebene, was die einfache Kraft für die gerade Linie ist. — Etwas Analoges für den Raum von drei Dimensionen existirt nicht.

Gleichgewicht zwischen drei Kräften in einer Ebene.

§. 24.

So speciell auch der Gegenstand scheint, dessen Theorie wir so eben entwickelt haben, indem nur solche Systeme von Kräften betrachtet wurden, bei denen zu jeder Kraft eine zweite ihr gleiche, parallele und entgegengesetzte gehörte, so ist doch die Theorie dieser Kräftepaare der Schlüssel zu allen fernern Untersuchungen über das Gleichgewicht.

Alle statischen Untersuchungen können in ihren Elementen auf Zusammensetzung von Kräften, die sich entweder parallel sind, oder sich in einem Punkte begegnen, und auf die umgekehrte Operation der Zerlegung der Kräfte zurückgebracht werden. Es wird daher schon im Voraus der Nutzen der Theorie der Paare erhellen, wenn wir zeigen, wie mit Hülfe derselben sich ganz einfach die Regeln ergeben, nach denen von zwei Kräften, die entweder mit einander parallel sind, oder sich schneiden, die Resultante gefunden werden kann.

Seyen AB, CD und KL, MN zwei Paare in einer Ebene, die einander das Gleichgewicht halten

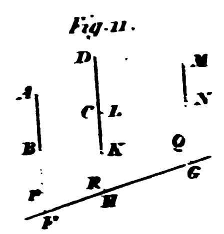
und daher von entgegengesetztem Sinne sind. Man verlege sie, was unbeschadet des Gleichgewichts immer geschehen kann (§. 17.), in der Ebene so, dass die Richtung einer Kraft CD des einen Paares mit der Richtung einer Kraft KL des andern Paares in eine und dieselbe Linie fällt, und dass diese zwei Richtungen einerlei, nicht einander entgegengesetzt, sind (Fig. 11.), — obwohl auch die letztere Annahme zu demselben Resultate, wie die erstere, führen würde. — Somit sind die anfänglichen vier Kräfte auf drei reducirt: AB, MN und $KL + CD$, von welchen die dritte der Summe der zwei ersten gleich ist, die zwei ersten aber, wie man leicht sieht, auf verschiedenen Seiten der dritten liegen und eine der dritten entgegengesetzte Richtung haben. Nächstdem aber verhalten sich AB und MN umgekehrt wie die Breiten der beiden Paare (§. 21.), d. i. die beiden ersten Kräfte umgekehrt wie ihre Abstände von der dritten.

Wenn daher von drei parallelen Kräften in einer Ebene 1) die mittlere eine den beiden äussern entgegengesetzte Richtung hat und 2) der Summe der äussern gleich ist, und wenn sich 3) die äussern umgekehrt wie ihre Abstände von der mittlern verhalten, so herrscht Gleichgewicht. Denn man wird immer nach Anleitung des Vorigen ein solches System in zwei einander das Gleichgewicht haltende Paare zerlegen können.

§. 25.

Die eben gefundenen drei Bedingungen für das Gleichgewicht dreier paralleler Kräfte in einer Ebene lassen sich noch etwas kürzer und damit für die Anwendung brauchbarer darstellen.

Zu dem Ende werde hier, so wie auch immer in



dem Folgenden, bei Bezeichnung eines Abschnitts einer Geraden durch Nebeneinanderstellung der zwei an die Enden des Abschnitts gesetzten Buchstaben die durch diese Stellung zugleich angedeutete Richtung berücksichtigt, so dass je zwei Abschnitte einer und derselben Geraden mit einerlei oder entgegengesetzten Zeichen genommen werden, nachdem die durch die Bezeichnungen der Abschnitte ausgedrückten Richtungen einerlei oder einander entgegengesetzt sind; dass daher immer $AB+BA=0$, und dass, wenn A, B, C drei in einer Geraden befindliche Punkte sind, mag C zwischen A und B, oder ausserhalb auf der Seite von A, oder der Seite von B liegen, man immer $AB+BC+CA=0$, $AB+BC=AB-CB=BC-BA=AC$, u. s. w. hat.

Dieses voraus bemerkt, nenne man die beiden äussern Kräfte P und Q, die mittlere R, welche man, weil sie nach der ersten Bedingung die entgegengesetzte Richtung von P und Q hat, als negativ betrachte, wenn man P, Q positiv nimmt. Alsdann ist zufolge der zweiten Bedingung: $P+Q=-R$, oder $P+Q+R=0$. Man ziehe ferner in der Ebene der Kräfte eine ihnen nicht parallele Gerade, welche von den Richtungen von P, Q, R resp. in F, G, H geschnitten werde, so haben die Abschnitte HF und GH einerlei Zeichen und sind den Abständen der P und Q von R proportional. Es verhält sich daher zufolge der dritten Bedingung:

$$P:Q=GH:HF, \text{ also auch}$$
$$P:(P+Q=-R)=GH:(GH+HF=GF), \text{ also}$$
$$P:R=GH:FG,$$

und in Verbindung mit der ersten Proportion:

$$P:Q:R=GH:HF:FG,$$

so dass jede der drei Kräfte dem gegenseitigen Abstande der beiden andern proportional ist.

Da hierin jede Kraft und ihr Durchschnitt mit der geraden Linie auf gleiche Art vorkommen, nämlich P und F eben so wie Q und G, eben so wie R und H, so ist es gleichviel, welche der drei Kräfte wir als die mittlere ansehen, und wir können unsern Satz ganz einfach so ausdrücken:

Zwischen drei parallelen Kräften P, Q, R in einer Ebene herrscht Gleichgewicht, wenn sie eine gerade Linie in F, G, H so schneiden, dass $P:Q:R = GH:HF:FG$.

In der That folgt daraus $P+Q+R=0$, weil immer $GH+HF+FG=0$, in welcher Ordnung auch F, G, H in der Geraden auf einander folgen mögen. Es muss daher eine der drei Kräfte nach der entgegengesetzten Richtung der beiden andern wirken, und, absolut genommen, der Summe der andern gleich seyn. Sey, wie vorhin, R diese eine Kraft, so haben, vermöge der Proportion, GH und HF einerlei Richtung, FG die entgegengesetzte. Es muss folglich H zwischen F und G, also R zwischen P und Q liegen. — Eben so würde man P zwischen Q und R liegend und der Summe von Q und R, absolut genommen, gleich gefunden haben, wenn man P nach der entgegengesetzten Richtung von Q und R hätte wirken lassen.

§. 26.

Zusätze. *a.* Eine der Kraft R gleiche und gerade entgegengesetzte Kraft $R' = -R = P+Q$ ist die Resultante von P und Q. Sollen daher zwei gegebene parallele Kräfte P und Q in eine zusammenge-

setzt werden, so ziehe man in ihrer Ebene eine gegen ihre Richtungen beliebig geneigte Gerade und nenne F, G die Durchschnitte derselben mit P, Q. Man theile nun die Gerade FG in H so, dass $GH:HF = P:Q$. Nach der Regel der Zeichen fällt dieser Punkt H entweder zwischen F und G, oder ausserhalb und zwar auf die Seite von F, (wo absolut $GH > HF$,) oder auf die Seite von G, (wo absolut $GH < HF$,) je nachdem P und Q einerlei Zeichen, d. i. einerlei Richtungen, oder entgegengesetzte haben und nachdem alsdann P absolut grösser oder kleiner als Q ist. Eine durch H mit P und Q parallel gelegte Kraft $R' = P + Q$, die daher im ersten jener drei Fälle die gemeinschaftliche Richtung von P und Q hat und der Summe von P und Q gleich ist, in den beiden andern nach der Richtung der jedesmal grössern, P oder Q, wirkt und der Differenz von P und Q gleich ist, wird die verlangte Resultante seyn.

b. Nur in dem Falle kann der Punkt H nicht angegeben, also auch die Resultante von P und Q nicht construirt werden, wenn $P = -Q$ ist, d. i. wenn die zwei zusammenzusetzenden Kräfte ein Paar ausmachen (vergl. §. 18. Zus.). Denn alsdann wird $R' = 0$, und $GH:HF = 1:-1$, also $GH:FH = 1:1$, welcher Proportion, da F und G nicht zusammenfallen sollen, streng genommen, nicht Genüge geschehen kann, der man aber um so näher kommt, je weiter man H in der Linie FG nach der einen oder andern Seite hinausrückt. Denn hierdurch nähern sich die Verhältnisse $GH:FH = P:-Q$ immer mehr der Einheit, und R' wird gegen P und Q immer kleiner. In der Sprache der Analysis ist daher die Resultante eines Paares eine Kraft $= 0$ in unendlicher Entfernung.

c. Soll umgekehrt eine gegebene Kraft $R' = -R$ in zwei andere mit ihr parallele und in derselben Ebene enthaltene Kräfte P und Q zerlegt werden, so schneide eine gerade Linie die Richtung von R' und die ebenfalls als gegeben vorauszusetzenden Richtungslinien von P und Q in den Punkten H, F, G, und man hat nach dem Vorigen die Gleichungen:

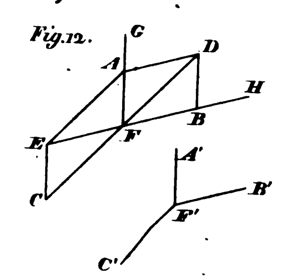
$$P = \frac{GH}{FG} \cdot R = \frac{HG}{FG} \cdot R', \quad Q = \frac{HF}{FG} \cdot R = \frac{FH}{FG} \cdot R',$$

wodurch mit gehöriger Rücksicht auf die Vorzeichen der Abschnitte FG u. s. w. die Intensitäten von P und Q und ihre Richtungen in Bezug auf R' vollkommen bestimmt werden.

§. 27.

Mittelst der Theorie der Kräftepaare wollen wir jetzt noch die Resultante zweier sich schneidenden Kräfte zu bestimmen suchen. Seyen diese Kräfte durch FA, FB (Fig. 12.) dargestellt. Die ihnen das Gleichgewicht haltende Kraft, deren Richtung ebenfalls durch F geht und in den Scheitelwinkel von AFB fällt (Grunds. V. u. VII.), sey FC.

Man ergänze den Winkel AFB zu einem Parallelogramm $AFBD$, so ist das Paar FA, DB gleichwirkend mit dem Paare AD, BF. (§. 20.). Folglich sind auch die Kräfte FA, FB gleichwirkend mit den Kräften AD, BD, folglich die durch F gehende Resultante der beiden erstern Kräfte gleichwirkend mit der durch D gehenden Resultante der beiden letztern; mithin ist FD die gemeinschaftliche Richtung der beiden Resultanten. Da nun wegen des Gleichgewichts zwischen FA, FB, FC, durch CF die Resultante von FA, FB dargestellt wird, so müssen FD und FC



in dieselbe Gerade fallen. Eben so wird bewiesen, dass, wenn man den Winkel AFC zu einem Parallelogramm $AFCE$ vollendet, die FB in die Verlängerung von EF fallen muss.

Hiernach ist AD mit FB sowohl, als auch mit EF, und AE mit FC sowohl, als mit DF, parallel. Folglich ist auch $ADFE$ ein Parallelogramm, mithin $FD = EA = CF =$ der Resultante von FA und FB, und es wird daher diese Resultante durch FD nicht allein der Richtung, sondern auch der Grösse nach ausgedrückt. — Dies giebt den berühmten Satz vom Parallelogramme der Kräfte:

Schneiden sich die Richtungen zweier Kräfte, so ist, wenn man vom Schneidepunkte aus auf die Richtungen den Kräften proportionale Linien trägt und diese zwei Linien zu einem Parallelogramm ergänzt, die durch den Schneidepunkt der Kräfte gehende Diagonale des Parallelogramms ihrer Richtung und Grösse nach die Resultante der beiden Kräfte.

§. 28.

Zusätze. *a.* Soll eine gegebene Kraft FD in zwei andere durch F gehende und nach gegebenen Richtungen FG, FH wirkende Kräfte zerlegt werden, so ziehe man durch D mit FH, FG, Parallelen, welche FG, FH resp. in A, B schneiden, und FA, FB werden die gesuchten Kräfte seyn.

b. Die Kräfte FA, FB, FC sind resp. den Seiten FA, AD, DF des Dreiecks DFA gleich, und kommen auch ihren Richtungen nach mit denselben überein. Sind daher drei Kräfte bloss ihrer Intensität nach gegeben, und will man sie dergestalt auf einen Punkt F wirken lassen, dass sie einander das Gleichgewicht

halten, so construire man aus ihnen ein Dreieck DFA, und es werden die durch F' mit den Seiten des Dreiecks gleich und parallel gelegten Kräfte $F'A'$, $F'B'$, $F'C'$ mit einander im Gleichgewichte seyn. — Kann aus den drei Kräften kein Dreieck construirt werden, ist also eine Kraft grösser, als die Summe der beiden andern, so ist auch zwischen ihnen, wenn sie auf einen Punkt wirken, auf keine Weise Gleichgewicht möglich.

c. In dem aus den drei Kräften gebildeten Dreiecke DFA sind die Winkel ADF, DFA, FAD resp. den Nebenwinkeln gleich von denen, welche die auf F oder F' wirkenden Kräfte mit einander machen, d. i. den Nebenwinkeln von BFC, CFA, AFB. Alle zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks aus der Trigonometrie bekannten Relationen finden daher auch beim Gleichgewichte dreier auf einen Punkt wirkender Kräfte zwischen ihnen selbst und den Supplementen der von ihnen mit einander gebildeten Winkel statt. Es verhält sich daher beim Gleichgewichte:

$$FA : FB : FC = \sin BFC : \sin CFA : \sin AFB,$$

d. h. jede Kraft ist dem Sinus des von den zwei andern Kräften gebildeten Winkels proportional, — auf analoge Art, wie bei drei parallelen Kräften im Gleichgewichte jede Kraft mit der gegenseitigen Entfernung der beiden andern im Verhältnisse war. Diese Aehnlichkeit der Gesetze für beiderlei Arten von Gleichgewicht rührt, wie man leicht wahrnimmt, daher, dass parallele Kräfte auch als solche angesehen werden können, die sich in unendlicher Entfernung unter unendlich kleinen Winkeln schneiden, und dass die Sinus dieser Winkel den gegenseitigen Abständen der Parallelen proportional zu achten sind. Man hätte daher das Gleichgewicht zwischen parallelen Kräften auch unmit-

telbar aus dem Gleichgewichte zwischen Kräften, die sich in einem Punkte treffen, als den Grenzfall dieses letztern, ableiten können.

Gleichgewicht zwischen vier Kräften in einer Ebene.

§. 29.

Die eben erhaltenen Sätze vom Gleichgewichte zwischen drei Kräften in einer Ebene, sind, wie sich zeigen lässt, hinreichend, um die Bedingungen des Gleichgewichts für irgend ein System auf einen freien Körper wirkender Kräfte zu entwickeln. Indessen werde ich, um zu diesen allgemeinen Bedingungen zu gelangen, von jenen Sätzen keinen unmittelbaren Gebrauch machen, sondern, von der Theorie der Paare ausgehend, einen mehr analytischen Weg einschlagen, auf dem sich zuletzt jene Sätze, als die speciellsten Fälle der allgemeinen Resultate, wieder finden werden. — Mag hier nur noch eine einfache Anwendung des Parallelogramms der Kräfte auf ein System von vier Kräften in einer Ebene eine Stelle finden.

Von vier in einer Ebene wirkenden Kräften sind die Richtungen gegeben; man soll hieraus unter der Voraussetzung, dass sich die Kräfte das Gleichgewicht halten, die Verhältnisse ihrer Intensitäten finden.

Vier in einer Ebene enthaltene Gerade bestimmen im Allgemeinen drei Vierecke, bei deren einem von keiner Seite oder der Verlängerung derselben die gegenüberliegende Seite innerhalb ihrer Endpunkte geschnitten wird. Sey $ABCD$ (Fig. 13.) dieses eine der drei Vierecke, welche von den Richtungen der vier Kräfte gebildet werden.

entgegengesetzten durch den Punkt gelegten Kraft gebildet wird. Der geometrische Ausdruck des Momentes der Kraft *AB* in Bezug auf den Punkt *M* ist daher das Parallelogramm, zu welchem sich das Dreieck *MAB* ergänzen lässt, oder das Doppelte dieses Dreiecks. Der numerische Werth des Moments aber ist das Product aus der Kraft in ihren Abstand von dem Punkte, und dieses Product ist nach §. 23. und §. 16. positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Richtung der Kraft, von dem Punkte aus beobachtet, von der Rechten nach der Linken z. B. oder von der Linken nach der Rechten geht, oder, was dasselbe ist: je nachdem, wenn der Punkt unbeweglich wäre, die Ebene um ihn nach der einen oder andern Seite zu von der Kraft gedreht werden würde.

Das Moment einer und derselben Kraft ist demnach ihrem Abstande von dem Punkte, worauf sie bezogen wird, proportional, und kann nur für solche Punkte von gleicher Grösse seyn, die in einer mit der Kraft gezogenen Parallele liegen. Für zwei Punkte, die auf entgegengesetzten Seiten der Kraft sich befinden, haben die Momente entgegengesetzte Zeichen, und für einen in der Richtung der Kraft selbst gelegenen Punkt ist das Moment $= 0$. Für drei Punkte endlich, die nicht in einer Geraden liegen, kann es keine Kraft geben, die in Bezug auf dieselben der Grösse und dem Zeichen nach gleiche Momente hätte.

§. 31.

Was wir in dem vorigen Kapitel das Moment eines Paares genannt haben, ist nichts anderes, als die Summe der Momente der zwei das Paar bildenden Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene

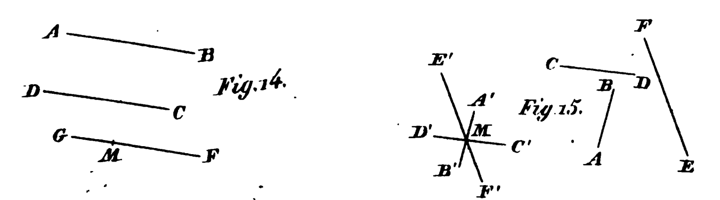
des Paares. Denn sind AB, CD (Fig. 14.) die zwei Kräfte eines Paares, und M der Punkt ihrer Ebene, auf welchen sie bezogen werden sollen, so ist, wenn man durch M eine der Kraft AB gleiche, parallele und entgegengesetzte Kraft FG legt, das Moment von AB in Bezug auf M, gleich dem Momente des Paares AB, FG, und das Moment von CD in Bezug auf M, gleich dem Momente des Paares CD, GF; folglich die Summe der Momente von AB und CD in Bezug auf M, gleich der Summe der Momente der Paare AB, FG und CD, GF, gleich dem Momente des Paares AB, CD, da die Paare AB, FG und CD, GF zusammen, gleichwirkend mit dem Paare AB, CD sind.

Ein Kräftepaar besitzt demnach die merkwürdige Eigenschaft, dass die Summe der Momente seiner Kräfte ganz unabhängig von dem Punkte ist, worauf die Momente bezogen werden. Es ist diese Summe dem Momente der einen Kraft selbst gleich, wenn man dasselbe auf einen in der Richtung der andern Kraft liegenden Punkt bezieht.

So wie übrigens diese constante Summe der Momente von den Kräften eines Paares in dem Vorigen das Moment des Paares selbst genannt wurde, so soll auch in der Folge die Summe der Momente von den Kräften eines beliebigen Systems in Bezug auf einen gewissen Punkt der Ebene, worin das System enthalten ist, das M o m e n t d e s S y s t e m s in Beziehung auf diesen Punkt heissen.

§. 32.

Dieses vorausgeschickt, seien AB, CD, EF, ... (Fig. 15.) mehrere in einer Ebene nach beliebigen Rich-



beliebigen Punkt der Ebene gleiche Momente. — Das Moment eines Systems, welches ein Kräftepaar, oder eine einfache Kraft zur Resultante hat, ist daher dem Momente des Paares, oder der einfachen Kraft gleich; also mit Berücksichtigung der Eigenschaften dieser letztern Momente (§§. 30. 31.):

B. *Hat ein in einer Ebene enthaltenes System ein Kräftepaar zur Resultante, so ist das Moment des Systems für keinen Punkt der Ebene null, für alle aber von einer und derselben Grösse.*

C. *Reducirt sich das System auf eine einzige Kraft, so sind seine Momente nur für diejenigen Punkte der Ebene null, welche in der Resultante selbst liegen, und überhaupt sind die Momente, welche das System für irgend drei, nicht in einer Geraden liegende Punkte hat, nicht alle drei einander gleich.*

Da es ausser diesen drei Fällen A., B. und C. keinen andern noch giebt, so ist es gestattet, auch umgekehrt zu schliessen:

A*. *Hat man ein System von Kräften in einer Ebene, und sind für drei Punkte der Ebene, welche nicht in einer Geraden liegen, die Momente des Systems einzeln null, so ist das System im Gleichgewichte, und sein Moment auch für jeden vierten Punkt der Ebene null.*

B*. *Sind für gedachte drei Punkte die Momente nicht null, jedoch von gleicher Grösse, so reducirt sich das System auf ein Kräftepaar, und sein Moment ist für jeden vierten Punkt der Ebene von derselben Grösse.*

C*. *Wird keine dieser beiden Bedingungen erfüllt, so hat das System eine einfache Kraft zur Resultante.*

§. 34.

Um von dem Vorigen eine einfache und zugleich für das Folgende nutzbare Anwendung zu machen, wollen wir bei dem Parallelogramm $OACB$ (Fig. 16.) das Moment der drei durch OA, OB, CO dargestellten Kräfte in Bezug auf die drei Puncte O, A, B betrachten.

Weil O ein Punkt in der Richtung jeder der drei Kräfte ist, so ist in Bezug auf ihn das Moment jeder derselben $=0$, also auch die Summe dieser Momente oder das Moment der drei Kräfte $=0$.

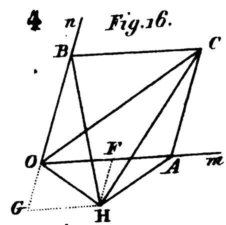
In Bezug auf A sind die Momente von OB und CO einander entgegengesetzt und, ihrem absoluten Werthe nach, einander gleich, weil es die Dreiecke AOB und ACO sind, deren Doppelte diese Momente ausdrücken. Es ist mithin die Summe derselben $=0$, und da in Bezug auf A das Moment von OA, $=0$ ist, so ist für A das Moment aller drei Kräfte gleichfalls $=0$.

Eben so wird bewiesen, dass auch in Bezug auf den Punkt B das Moment dieser Kräfte $=0$ ist.

Da also für jeden der drei Punkte O, A, B das Moment der drei Kräfte null ist, und diese Punkte nicht in einer Geraden liegen, so sind die Kräfte im Gleichgewichte, und ihr Moment auch für jeden vierten Punkt ihrer Ebene null, oder, was dasselbe ausdrückt: OC ist die Resultante von OA und OB (§. 27.) und für jeden Punkt H in der Ebene dieser Kräfte ist die Summe der Dreiecke HOA und HOB dem Dreiecke HOC gleich; d. h.

Von drei Dreiecken in einer Ebene, welche eine gemeinschaftliche Ecke H und zu gegenüberstehen-

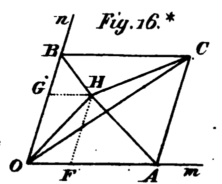
4



den Seiten zwei anstossende Seiten OA und OB, und die durch derselben gemeinschaftliche Ecke gehende Diagonale OC eines Parallelogramms haben, ist die Summe der beiden ersten Dreiecke HOA und HOB dem dritten HOC gleich.

Nur hat man in dieser Formel, wenn sie allgemeine Gültigkeit haben soll, stets die Vorzeichen der Dreiecke gehörig mit zu berücksichtigen, und, nach der in §. 30. für die Momente gegebenen Regel, jedes Dreieck positiv oder negativ zu nehmen, nachdem, von der in seinem Ausdrucke zuerst gesetzten Ecke H aus, die Richtung von der zweiten nach der dritten nach rechts z. B. oder nach links gehend erscheint. So haben in Fig. 16. die drei Dreiecke HOA, HOB, HOC einerlei Zeichen; dagegen liegt in Fig 16* der Punkt H so, dass dem Dreiecke HOB das entgegengesetzte Zeichen der beiden übrigen zukommt.

Auch in dem Folgenden hat man, wenn Dreiecksflächen durch Nebeneinanderstellung der die Ecken bezeichnenden Buchstaben ausgedrückt werden, auf die Ordnung der Buchstaben immer mit Rücksicht zu nehmen und hiernach das Vorzeichen der Fläche zu beurtheilen. Man lasse nämlich, was mit der vorigen Bestimmung auf dasselbe hinauskommt, um den im Ausdrucke zuerst gesetzten Punkt eine von ihm ausgehende Gerade sich dergestalt drehen, dass ihr Endpunkt von dem zweiten nach dem dritten Punkte des Ausdrucks fortgeht, sie selbst also die Fläche des Dreiecks beschreibt; und je nachdem der Sinn dieser Drehung mit dem voraus festgesetzten positiven Sinne der Drehung in der Ebene übereinstimmt oder nicht, lege man der Fläche einen positiven oder negativen Werth bei.



Wie man leicht sieht, haben hiernach von den sechs möglichen Ausdrücken

$$ABC,\ BCA,\ CAB,\ ACB,\ BAC,\ CBA$$

für eine Dreiecksfläche, deren Ecken A, B, C sind, die drei ersteren einerlei Zeichen, die drei letzteren aber das entgegengesetzte der ersteren.

§. 35.

Zusätze. *a*. Der geometrische Satz des vorigen §. kann noch folgendergestalt ausgedrückt werden: Legt man durch eine Ecke O eines Dreiecks OCH in seiner Ebene zwei sich unter einem beliebigen Winkel schneidende Axen m und n, und projicirt auf sie durch Parallelen mit ihnen eine der beiden andern Ecken, C, so ist, wenn A und B diese Projectionen von C auf m und n sind, das Dreieck OCH gleich der Summe der beiden Dreiecke OAH und OBH, die man erhält, wenn man in dem Ausdrucke des erstern für die Ecke C successive ihre Projectionen setzt.

b. Auf gleiche Weise hat man, wenn F und G die Projectionen von H auf dieselben Axen m und n sind:

$$OAH = OAF + OAG,$$
$$OBH = OBF + OBG.$$

Weil aber O, A, F sowohl, als O, B, G, in gerader Linie liegen, so ist jedes der Dreiecke OAF und OBG null, und daher

$$OAH = OAG,\quad OBH = OBF,$$

folglich $OCH = OAH + OBH = OAG + OBF$
$= OAG - OFB.$

c. Werden m, n zu zwei Coordinatenaxen genommen, so sind OA, OB die Coordinaten von C, und

OF, OG die Coordinaten von H. Mittelst der letzterhaltenen Formel lässt sich dann leicht der Inhalt eines Dreiecks OCH, dessen eine Ecke der Anfangspunkt der Coordinaten ist, durch die Coordinaten der beiden anderen Ecken ausdrücken. Bezeichnet nämlich in dem Ausdrucke OAG eines Dreiecks der zuerst gesetzte Buchstabe O den Anfangspunkt der Coordinaten, der zweite A einen Punkt in der Axe m, der dritte G einen Punkt in der Axe n, und ist α der Winkel, um welchen nach dem vorher festgesetzten positiven Sinne der Drehung der positive Theil von m gedreht werden muss, bis er mit dem positiven Theile von n zusammenfällt, so ist immer nicht allein rücksichtlich des absoluten Werthes, sondern auch mit Hinsicht auf das Zeichen, der Inhalt von

$$OAG = \tfrac{1}{2} OA \,.\, OG \,.\, \sin\alpha.$$

Denn liegen A und G von O nach den positiven Seiten der Axen m und n zu, und ist $\alpha < 180°$, so sind sämmtliche Factoren des den Werth von OAG ausdrückenden Products positiv, und man überzeugt sich durch unmittelbare Anschauung, dass dann nach der zu Ende des vorigen §. gegebenen Regel auch die Dreiecksfläche OAG einen positiven Werth hat. Eben so leicht gewahrt man, dass, wenn entweder A von der positiven auf die negative Seite von m rückt und damit OA negativ wird, oder wenn OG negativ wird, oder wenn $\sin\alpha$ es wird, jedesmal auch die Fläche OAG ihr Zeichen ändert, und dass somit letztere Formel allgemeine Gültigkeit hat.

Setzt man daher die Coordinaten von C, $= a$, b und die von H, $= f$, g, so ist in jedem Falle

$$OAG = \tfrac{1}{2}\, ag \sin\alpha, \text{ eben so } OFB = \tfrac{1}{2}\, fb \sin\alpha$$

und folglich nach der Formel in b.:

$$OCH = \tfrac{1}{2}\,(ag - fb) \sin\alpha.$$

§. 36.

Um jetzt, den in §. 33. erhaltenen Resultaten gemäss, irgend ein vorgelegtes System von Kräften in einer Ebene leicht beurtheilen und, falls es eine Resultante hat, dieselbe berechnen zu können, wollen wir alle Punkte der Ebene auf zwei Axen von Coordinaten x und y beziehen. Der Winkel der Axe der y mit der der x sey $= \alpha$; (von dessen Bestimmung dasselbe gelte, was im vorigen §. von der Bestimmung des Winkels der Axe n mit m gesagt worden).

Indem wir nun, wie in dem Vorhergehenden, eine in der Ebene wirkende Kraft P ihrer Intensität und Richtung nach durch eine gerade Linie AB ausdrücken, seyen die Coordinaten des Punktes A, $= x$, y; die des Punktes B, $= x + X$, $y + Y$. Hiernach sind X und Y die Projectionen der Linie AB auf die Axen der x und der y, und stellen damit zugleich Kräfte vor, zu denen sich die Kraft P eben so, wie die Linie AB zu ihren Projectionen verhält.

Durch x, y, X, Y ist daher die Kraft vollkommen bestimmt: durch x, y ein Punkt ihrer Richtung, und durch X, Y ihre Intensität und die Winkel ihrer Richtung mit den Coordinatenaxen, — die Winkel schon durch das Verhältniss $X : Y$. Ist nämlich φ der Winkel, den die Kraft $AB = P$ mit der Axe der x macht, d. h. der Winkel, um welchen diese Axe nach dem vorher als positiv bestimmten Sinne gedreht werden muss, bis sie mit P parallel wird, und ihre positive Richtung mit der Richtung von P selbst, nicht mit der entgegengesetzten, übereinkommt, so folgt aus der Betrachtung des Dreiecks, welches von AB und von

den durch A und B mit den Axen der x und y gelegten Parallelen gebildet wird:

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{X}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{Y}{\sin \varphi},$$

wodurch sich X und Y aus P und φ, und umgekehrt P und φ aus X und Y, finden lassen.

In der analytischen Geometrie ist es gewöhnlich, einen Punkt, dessen Coordinaten x und y sind, durch (x, y) auszudrücken. Auch hier werde ich von dieser Abkürzung Gebrauch machen, und zugleich auf analoge Weise eine Kraft, deren Projectionen auf die Axen der x und y resp. X und Y sind, mit (X, Y) bezeichnen.

Eine andere Kraft (X', Y') ist hiernach mit (X, Y) parallel, wenn $X' : X = Y' : Y$, und je nachdem der Exponent dieser Verhältnisse positiv oder negativ ist, haben die beiden Kräfte einerlei oder entgegengesetzte Richtungen. Die Kräfte (X, Y) und $(-X, -Y)$ bilden daher im Allgemeinen ein Paar, halten aber einander das Gleichgewicht, wenn die parallelen Richtungen beider zusammenfallen. $(X, 0)$, ist der Ausdruck einer mit der Axe der x parallel wirkenden Kraft X, so wie $(0, Y)$ die Kraft Y in einer mit der Axe der y parallelen Lage vorstellt; u. s. w.

§. 37.

Bezeichnet O den Anfangspunct der Coordinaten, so ist, wie man aus der analytischen Geometrie weiss, und wie auch in §. 35. durch statische Betrachtungen erwiesen worden, der doppelte Inhalt der Dreiecksfläche OAB, von deren Ecken A und B die Coordinaten resp. x, y und $x + X$, $y + Y$ sind,

$$= (x(y + Y) - y(x + X)) \sin \alpha = (xY - yX) \sin \alpha.$$

Dies ist also zugleich das Moment der durch den Punkt (x, y) gehenden Kraft (X, Y) in Bezug auf den Anfangspunkt der Coordinaten.

Wird das Moment nicht in Bezug auf den Anfangspunkt, sondern für irgend einen andern Punkt H der Ebene, dessen Coordinaten f, g sind, verlangt, so kommt, weil für diesen als Anfangspunkt die vorigen Coordinaten x, y in $x-f$, $y-g$ übergehen:

$$[(x-f)\,Y-(y-g)\,X]\sin\alpha.$$

Hat man daher ein System von Kräften (X, Y), (X', Y'), (X'', Y''), ... in einer Ebene, welche resp. durch die Punkte (x, y), (x', y'), (x'', y''), ... gehen, so erhält man das Moment des ganzen Systems in Bezug auf den Punkt H oder (f, g), wenn man nach letzterer Formel das Moment jeder Kraft einzeln entwickelt und alle diese Momente in eine Summe bringt. Dies giebt, wenn das Moment des Systems in Beziehung auf H, $=(H)$, und die von den Coordinaten dieses Punktes unabhängigen Summen

$$X+X'+X''+\ldots\ldots\ldots=A$$
$$Y+Y'+Y''+\ldots\ldots\ldots=B$$
$$xY-yX+x'Y'-y'X'+\ldots=N$$

gesetzt werden:

$$(H)=(gA-fB+N)\sin\alpha.$$

Mit Hülfe dieses Ausdrucks für das Moment eines Systems von Kräften in einer Ebene lassen sich nun alle hierher gehörigen Aufgaben ohne Schwierigkeit lösen.

§. 38.

Soll erstlich das System im Gleichgewichte seyn, so muss für jede Lage des Punktes H in der Ebene, also für alle Werthe, die f und g annehmen können,

das Moment $(H) = 0$ seyn (§. 33. A.). Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad N = 0;$$

und da umgekehrt, wenn diese Gleichungen erfüllt werden, für jeden Ort von H, $(H) = 0$ wird, und somit Gleichgewicht statt findet, (§. 33. A^*.), so sind diese drei Gleichungen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen fürs Gleichgewicht. Die zwei ersten drücken aus, dass die Summe der Projectionen der Kräfte auf die Axe der x, und die Summe der Projectionen auf die Axe der y, jede für sich, $= 0$ ist. Die dritte Gleichung giebt zu erkennen, dass das Moment des Systems in Bezug auf den Anfangspunkt der Coordinaten $= 0$ ist. Denn versetzt man H in den Anfangspunkt, so werden f und $g = 0$ und damit $(H) = N \sin \alpha$.

Uebrigens würde man zu diesen drei Bedingungsgleichungen schon gekommen seyn, wenn man nur für drei Punkte (f, g), (f', g'), (f'', g''), wobei nicht die Relation $f(g' - g'') + f'(g'' - g) + f''(g - g') = 0$ obwaltet, das Moment $= 0$ gesetzt hätte; — übereinstimmend damit, dass, wenn das Moment für drei Punkte der Ebene, die nicht in einer Geraden liegen, $= 0$ ist, es damit auch für alle übrigen Punkte der Ebene verschwindet.

§. 39.

Soll zweitens das System sich auf ein Paar reduciren, so muss (H) für jede Lage des Punktes H von constanter Grösse, also unabhängig von f und g seyn (§. 33. B.). Dies führt zu den zwei Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, wodurch (H) den constanten Werth $N \sin \alpha$ erhält, welcher nicht null seyn darf. Sind umgekehrt A und $B = 0$, so ist (H) für alle Werthe von

f und g von derselben Grösse, und das System, wenn es nicht im Gleichgewichte ist, hat ein Paar zur Resultante, (§. 33. B^*), dessen Moment seinem Sinne und seiner Grösse nach durch $N \sin \alpha$ gegeben ist.

Die Bedingungen, dass die Summen der Projectionen der Kräfte auf die Axen der x und y einzeln $= 0$ sind, sind demnach hinreichend und nothwendig, um uns zu vergewissern, dass das System, wofern es nicht im Gleichgewichte ist, sich auf ein Kräftepaar reducirt. Man bemerke hierbei noch, dass, wenn die Kräfte durch Parallelen mit der Axe der y (der x) auf die Axe der x (der y) projicirt werden, und die Summe der Projectionen null ist, sie dieses bleibt, wenn man statt der Axe der x (der y) irgend eine andere Gerade der Ebene zur Projectionslinie wählt. Da also die Lage der Geraden, auf welche projicirt wird, hierbei nicht in Rücksicht kommt, so können wir, diese Gerade ganz unerwähnt lassend, das eben erhaltene Resultat folgendergestalt ausdrücken:

Werden die Kräfte zu zweien Malen, jedes Mal durch Parallelen mit einer andern Richtung in der Ebene, projicirt, und ist beide Male die Summe der Projectionen null, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht, oder sie reduciren sich auf ein Paar, und die Summe der Projectionen ist auch für jede dritte Richtung der projicirenden Parallelen null.

Denken wir uns die Projectionen als in der Axe selbst, worauf projicirt wird, wirkende Kräfte, so können wir statt des Ausdrucks: die Summe der Projectionen sei null, nach §. 14. *d.* auch sagen: die Projectionen der Kräfte seyen im Gleichgewichte mit einander.

§. 40.

Werden die Bedingungen $A=0$, $B=0$ nicht erfüllt, so hat das System eine einfache Resultante. Sie sey (X_1, Y_1), und (x_1, y_1) ein beliebiger Punkt ihrer Richtung. Da die Resultante, in gerade entgegengesetzter Richtung genommen, mit dem Systeme das Gleichgewicht hält, so hat man, um sie zu bestimmen, nur die Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen den Kräften des Systems und einer durch den Punkt (x_1, y_1) gehenden Kraft $(-X_1, -Y_1)$ niederzuschreiben. Diese Gleichungen sind (§. 38.):

$$-X_1+A=0,\ -Y_1+B=0,$$
$$-x_1 Y_1+y_1 X_1+N=0.$$

Hieraus folgt:

$$X_1=A,\ Y_1=B,\ x_1 B-y_1 A=N.$$

Nach den zwei ersten dieser drei Gleichungen sind die Projectionen der Resultante auf die Axen der x und y resp. den Summen der Projectionen der gegebenen Kräfte auf dieselben Axen gleich, oder mit andern Worten (vergl. vor. §.): Werden die Kräfte und ihre Resultante auf eine und dieselbe Linie der Ebene projicirt, so ist die Projection der Resultante die Resultante der Projectionen der Kräfte. Hiermit ist die Resultante ihrer Grösse und den Winkeln nach, die sie mit den Axen bildet, bestimmt.

Die dritte Gleichung giebt je zwei zusammengehörige Werthe der Coordinaten eines Punktes in der Richtung der Resultante und ist daher die Gleichung dieser Linie, deren Lage somit vollkommen bestimmt ist. Auch erkennt man aus den Coefficienten von x_1 und y_1, dass diese Linie, wie gehörig, mit den Axen der x und y dieselben Winkel macht, welche sich aus den Werthen

von X_1 und Y_1 für die Richtung der Resultante ergeben. Findet sich $N=0$, so geht die Resultante durch den Anfangspunkt der Coordinaten.

Zusatz. Auf eben die Art, wie wir jetzt von einem Systeme, welches eine einfache Resultante hatte, dieselbe fanden, lässt sich auch der Fall in §. 39., wo A und $B=0$, behandeln, indem man durch Hinzufügung zweier Kräfte das Gleichgewicht herzustellen sucht. Denn man sieht sogleich, dass durch den Zusatz einer einzigen Kraft die Summen der Projectionen nicht mehr $=0$ bleiben können, wie doch zum Gleichgewichte erforderlich ist. Seyen daher $(-X_1, -Y_1)$, $(-X_2, -Y_2)$ die zwei neuen Kräfte und (x_1, y_1), (x_2, y_2) Punkte ihrer Richtungen, so hat man, wenn diese Kräfte mit dem System im Gleichgewichte seyn sollen:

$$-X_1-X_2+A=0,\quad -Y_1-Y_2+B=0,$$
$$-x_1Y_1+y_1X_1-x_2Y_2+y_2X_2+N=0;$$

folglich, weil A und $B=0$ sind:

$$X_2=-X_1,\quad Y_2=-Y_1,$$

d. h. die zwei neuen Kräfte bilden ein Paar (§. 36.). Die dritte Gleichung aber drückt bloss aus, dass das Moment dieses Paares dem Momente des gegebenen Systems gleich ist, ohne etwas weiteres über die Grösse der Kräfte und ihre Richtungen kund zu geben, — übereinstimmend mit dem im vorigen §. erhaltenen Resultat und mit der Eigenschaft der Paare, dass sie in ihrer Ebene, wohin man will, verlegt werden können.

§. 41.

Eine besondere Betrachtung verdienen noch die zwei speciellen Fälle, wenn sich alle Kräfte des Systems in

einem Punkte schneiden, und wenn sie alle mit einander parallel sind.

Den erstern Fall anlangend, nehme man der Einfachheit willen den gemeinschaftlichen Schneidepunkt der Richtungen zum Anfangspunkte der Coordinaten. Hierdurch wird das Moment einer jeden Kraft in Bezug auf den Anfangspunkt, als einen Punkt ihrer Richtung, $= 0$ (§. 30.). Es ist daher auch N, oder die Summe aller Momente in Bezug auf den Anfangspunkt, $= 0$, und es bleiben für das Gleichgewicht eines solchen Systems nur

$$A = 0 \text{ und } B = 0$$

als Bedingungsgleichungen übrig. Werden sie nicht erfüllt, so hat das System eine durch den Anfangspunkt gehende Resultante (X_1, Y_1), wo

$$X_1 = A, \quad Y_1 = B;$$

d. h. das System hat eine den gemeinschaftlichen Durchschnitt der Kräfte treffende Resultante (A, B).

§. 42.

Zusätze. *a.* Die zwei Gleichungen $A = 0$, $B = 0$ ergaben sich in §§. 38. und 39. als die Bedingungen, unter denen das Moment irgend eines Systems von Kräften in einer Ebene für jeden Punkt der Ebene entweder null oder überhaupt constant war. Dem jetzt Gefundenen gemäss können wir diese *Bedingungen für die Unveränderlichkeit des Moments* auch so ausdrücken: *Die Kräfte müssen, wenn sie parallel mit sich fortgeführt werden, so dass ihre Richtungen sich in einem Punkte schneiden, einander das Gleichgewicht halten.* Dasselbe fliesst auch aus §. 32., wo, wenn das System S im Gleichgewichte seyn oder sich

auf ein Paar reduciren soll, das System V, d. h. die parallel mit den Kräften des Systems S durch einen und denselben Punkt gelegten Kräfte, im Gleichgewichte seyn müssen.

b. Besteht das System nur aus zwei sich schneidenden Kräften, so nehme man die Richtung der einen Kraft zur Axe der x, die Richtung der andern zur Axe der y, und bezeichne daher die Kräfte mit $(X, 0)$, $(0, Y)$. Hieraus folgt $A = X$, $B = Y$, und die Resultante ist (X, Y). Von zwei sich schneidenden Kräften wird folglich die Resultante eben so gefunden, wie aus den zwei Projectionen einer Linie sie selbst hergeleitet wird, also dadurch, dass man aus den zwei Kräften ein Parallelogramm, das Parallelogramm der Kräfte (§. 27.), construirt, von welchem dann die durch den Schneidepunkt der Kräfte gehende Diagonale die Resultante ihrer Grösse und Richtung nach vorstellt.

c. Die Projectionen einer Kraft auf die beiden Axen sind daher nichts anderes, als die zwei Kräfte, welche man erhält, indem man erstere Kraft in irgend einem Punkte ihrer Richtung in zwei andere, parallel mit den beiden Axen zerlegt. In dieser Bedeutung die Projectionen genommen, wird umgekehrt die Richtigkeit des obigen Verfahrens, um von mehrern auf einen Punkt wirkenden Kräften die Resultante zu finden, noch einleuchtender. Es sind nämlich $X_1 = X + X' + ..$ und $Y_1 = Y + Y' + ..$ die in den Axen der x und y wirkenden Resultanten der zwei Systeme, die durch Zerlegung jeder Kraft des gegebenen Systems nach diesen zwei Axen hervorgehen. Die Resultante von X_1 und Y_1, oder die Kraft (X_1, Y_1), muss folglich die Resultante des ganzen Systems seyn.

§. 43.

Der zweite specielle Fall, dem wir noch Aufmerksamkeit widmen wollen, ist der, wenn alle Kräfte des Systems einander parallel sind. Werde dann, um möglichst einfache Formeln zu erhalten, die Axe der x mit den Kräften parallel gelegt, so sind, welches auch die Richtung der Axe der y seyn mag, $Y, Y', Y'', .. = 0$. $X, X', X'', ...$ drücken dann die Kräfte des Systems selbst aus, und es werden:

$$B = 0, \; N = -yX - y'X' - y''X'' - \ldots$$

Die drei Bedingungen des Gleichgewichts (§. 38.) reduciren sich hiermit auf die zwei:

$$A = 0, \; N = 0,$$

d. h. die Summe der Kräfte und die Summe ihrer Momente in Bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene müssen beiderseits $= 0$ seyn.

Ist bloss $A = 0$, so hat das System ein Paar zur Resultante, dessen Moment $= N \sin \alpha$.

Wenn A nicht $= 0$ ist, so reducirt sich das System auf eine einfache Kraft. Sey diese, wie in §. 40., (X_1, Y_1), und (x_1, y_1) ein Punkt ihrer Richtung, so ist nach den dortigen Formeln:

$$X_1 = A, \; Y_1 = 0, \; -y_1 A = N.$$

Die Resultante ist demnach $(A, 0)$, d. h. mit der Axe der x parallel, also parallel mit den Kräften des Systems, und der Summe derselben gleich. Der Abstand y_1 der Resultante von einem beliebigen Punkte der Ebene ergiebt sich aus den Kräften $X, X', ..$ und ihren Abständen $y, y', ...$ von demselben Punkte mittelst der dritten Gleichung und ist:

$$y_1 = -\frac{N}{A} = \frac{yX + y'X' + y''X'' + \ldots}{X + X' + X'' + \ldots}.$$

Wird dieser Punkt in der Resultante selbst genommen, sind also y, y', y'',... die Abstände der Kräfte von ihrer Resultante, so ist $y_1 = 0$ und

$$yX + y'X' + y''X'' + .. = 0.$$

Bei bloss zwei Kräften hat man $yX + y'X' = 0$, folglich $y : y' = X' : -X$; d. h. die Abstände zweier parallelen Kräfte von ihrer Resultante, die in diesem speciellen Falle eben so, wie in dem allgemeinen, mit den Kräften parallel geht und ihrer Summe gleich ist, verhalten sich umgekehrt wie die Kräfte, und die Kräfte liegen, wenn sie einerlei Richtung haben, auf entgegengesetzten Seiten der Resultante. (Vergl. §. 26.)

Geometrische Folgerungen.

§. 44.

Das Moment eines Systems von Kräften in einer Ebene ist entweder für alle Punkte der Ebene von constanter Grösse (§. 39.), — Null mit eingeschlossen, wo Gleichgewicht statt findet, — oder es ist von einem Punkte zum andern veränderlich, und alsdann lässt sich aus den Kräften des Systems eine neue Kraft, die Resultante, finden von der Beschaffenheit, dass für jeden Punkt der Ebene das Moment des Systems dem Momente dieser neuen Kraft gleich ist.

Da nun das Moment einer Kraft AB in Bezug auf den Punkt M dem doppelten Inhalte des Dreiecks MAB gleich ist, so lässt sich der voranstehende Satz von den Momenten auf folgende Art rein geometrisch darstellen:

Hat man ein System gerader Linien AB, CD,... in einer Ebene, so ist die algebraische (§. 34.) Summe der Dreiecke MAB, MCD,..., welche diese

Linien zu Grundlinien und einen und denselben Punkt *M* der Ebene zur gemeinschaftlichen Spitze haben, entweder für jeden Ort dieses Punktes von einerlei Grösse, oder von einem Orte zum andern veränderlich. Im letztern Falle aber lässt sich in der Ebene noch eine Linie von solcher Lage und Grösse angeben, dass für jeden Punkt der Ebene jene Summe von Dreiecken dem Dreiecke gleich ist, welches denselben Punkt zur Spitze und diese letztere Linie zur Basis hat.

Wir wollen jetzt diesen Satz mit Hülfe der Geometrie selbst zu beweisen suchen, indem dieses zu mehrerer Veranschaulichung einiger der vorigen Sätze dienen, und zur Entwickelung einiger neuen das Gleichgewicht betreffenden Beziehungen Gelegenheit geben wird. Um aber den Beweis in möglichster Allgemeinheit führen zu können, ist es nöthig, folgende Sätze vorauszuschicken.

§. 45.

Lehnsätze. 1. Sind A, B, C drei in einer Geraden liegende Punkte, D ein vierter ausserhalb der Geraden, so ist, eben so wie in §. 25. $AC = AB + BC = AB - CB$, u. s. w. war, auch mit Vorsetzung von D, das Dreieck

$$DAC = DAB + DBC = DAB - DCB = \text{u.s.w.}$$

und es verhalten sich:

$$AB : BC : CA = DAB : DBC : DCA.$$

Nur müssen dabei nach der in §. 34. gegebenen Regel stets die Vorzeichen der Dreiecke gehörig berücksichtiget werden.

2. Ist M ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC, so ist immer

$$MAB + MBC + MCA = ABC.$$

Beweis. Von den drei Geraden, welche M mit den Ecken des Dreiecks verbinden, wird wenigstens eine, es sey AM, die der Ecke A gegenüberliegende Seite BC schneiden. Geschehe dieses in Z, so ist nach 1.

$$\left.\begin{array}{l} ABC = ABZ + AZC \\ MBZ = MBC + MCZ \end{array}\right\} \text{weil } B, C, Z$$

$$\left.\begin{array}{l} BZA = BZM + BMA \\ CAZ = CAM + CMZ \end{array}\right\} \text{weil } A, M, Z$$

in einer Geraden liegen. Addirt man diese vier Gleichungen und bemerkt, dass nach §. 34. $ABZ = BZA$, u. s. w., so erhält man die zu beweisende Gleichung, die daher richtig ist, mag M innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks ABC liegen, wenn nur die Vorzeichen der Dreiecke gehörig beachtet werden.

3. Eben so, wie nach dem jetzt Erwiesenen, die algebraische Summe der drei Dreiecke, welche die Seiten eines Dreiecks zu Grundlinien und einen Punkt M in der Ebene des letztern zur gemeinschaftlichen Spitze haben, dem letztern Dreiecke selbst gleich, und daher von der Lage von M unabhängig ist, so ist auch bei jedem ebenen Vielecke von mehrern Seiten die algebraische Summe der über den Seiten sich erhebenden und in einer gemeinschaftlichen Spitze M zusammenstossenden Dreiecke für jeden Ort von M in der Vielecksebene von gleicher Grösse.

Denn sind A, B, C, D die vier auf einander folgenden Ecken eines Vierecks, so ist diese Summe

$$MAB + MBC + MCD + MDA$$

$$= MAB + MBC + MCA + MAC + MCD + MDA,$$

weil $MCA + MAC = 0$. Letzterer Ausdruck der Summe zieht sich aber nach 2. zusammen in

$$ABC + ACD$$

und ist daher von M unabhängig.

Sind ferner A, B, C, D, E die fünf auf einander folgenden Ecken eines ebenen Fünfecks, so ist die Summe der fünf Dreiecke

$$\begin{aligned} & MAB + MBC + MCD + MDE + MEA \\ = & MAB + MBC + MCD + MDA \\ & \quad + MAD + MDE + MEA \\ = & ABC + ACD + ADE, \end{aligned}$$

also gleichfalls von M unabhängig; und auf dieselbe Art lässt sich die Unabhängigkeit der Summe $MAB + \ldots$ von M sich bei jedem mehrseitigen Vielecke darthun.

Ist nun das Vieleck ein gewöhnliches, d. h. von der Beschaffenheit, dass keine zwei seiner Seiten sich innerhalb ihrer Grenzpunkte schneiden, so erhellet ohne Weiteres, dass die Summe $ABC + ACD + \ldots$ den Flächeninhalt des Vielecks ausdrückt. Der Analogie nach wird daher auch in dem Falle, wenn der Perimeter des Vielecks, bevor er in sich zurückkehrt, sich selbst ein oder mehrere Male schneidet, dieselbe von M unabhängige, von jeder Seite aber auf gleiche Weise abhängige Summe $MAB + MBC + \ldots$ der Inhalt des Vielecks genannt werden müssen.

Liegen z. B. die vier Ecken A, B, C, D eines Vierecks so, dass von den vier Seiten AB, BC, CD, DA die erste und dritte sich innerhalb ihrer Endpunkte in G (Fig. 17.) schneiden, so haben die zwei Dreiecke der Summe $ABC + ACD$ entgegengesetzte Zeichen und die Summe ist dem Unterschiede der Dreiecke $GBC - GAD$ gleich. Als der Inhalt eines solchen

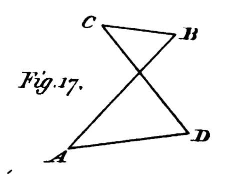


Fig. 17.

Vierecks ist daher dieser Unterschied anzusehen, so dass, wenn DB mit AC parallel läuft, und mithin GBC und GAD einander gleich sind, der Inhalt $=0$ ist.

Von der Summe der Dreiecke $MAB + MBC + \ldots$ kann man sich eine sehr anschauliche Vorstellung machen, wenn man sich, wie in §. 34., jedes dieser Dreiecke durch die Bewegung einer geraden Linie um M, als um den einen ihrer Endpunkte, entstanden denkt, während der andere Endpunkt die gegenüberstehende Seite AB, oder BC, ... durchläuft. Die Summe aller Dreiecke, oder die Fläche des Vielecks, lässt sich daher als die Fläche betrachten, welche erzeugt wird, indem eine Gerade, welche von einem willkührlich in der Vielecksebene zu bestimmenden Punkte M ausgeht, mit ihrem andern Endpunkte den Perimeter des Vielecks beschreibt; nur dass dabei Theile der Fläche, bei welchen die Bewegung um M nach entgegengesetztem Sinne geht, als sich gegenseitig aufhebend genommen werden müssen.

Uebrigens werden wir, wie gewöhnlich, die Fläche eines Vielecks durch Nebeneinanderstellung der Ecken in der Ordnung, nach welcher sie im Perimeter auf einander folgen, ausdrücken, so dass hiernach von dem Vierecke $ABCD$ z. B. das Viereck $BCDA$ weder der Grösse noch dem Zeichen nach verschieden ist, dagegen $ADCB$ ein Viereck ausdrückt, das mit dem erstern zwar einerlei absolute Grösse, aber das entgegengesetzte Zeichen hat, $ACBD$ aber ein von $ABCD$ ganz verschiedenes Viereck darstellt.

4. Wird in dem Ausdrucke ABC eines Dreiecks statt eines der drei Punkte, z. B. statt B, ein anderer E gesetzt, der mit dem erstern in einer der gegenüberstehenden Seite CA parallelen Geraden liegt, so

ist das neue Dreieck AEC dem erstern ABC sowohl der absoluten Grösse, als auch dem Zeichen nach, gleich.

5. Ist $ABCD$ (Fig. 18.) ein Parallelogramm, und M ein beliebiger Punkt in dessen Ebene, so ist

$$MAB + MCD = MBC + MDA = \tfrac{1}{2} ABCD.$$

Beweis. Man ziehe durch M mit AB eine Parallele, welche DA in L treffe, so ist, nach 4., $MAB = LAB$, und $MCD = LCD = LBD$, folglich:

$$MAB + MCD = LAB + LBD = BDL + BLA$$
$$= BDA \text{ (nr. 1.) } = \tfrac{1}{2} ABCD;$$

und eben so wird gezeigt, dass auch

$$MBC + MDA = \tfrac{1}{2} ABCD.$$

Dieser Satz ist, statisch betrachtet, offenbar kein anderer, als der schon in §. 31. bewiesene, dass die Summe der Momente der zwei Kräfte eines Paares für jeden Punkt in der Ebene des Paares von gleicher Grösse ist.

§. 46.

Wir lassen jetzt den Beweis des Satzes in §. 44. folgen. — Sey A_1B_2, B_1C_2, C_1D_2 (Fig. 19.) ein System gerader Linien in einer Ebene, und die Summe der Dreiecke zu untersuchen, welche diese Linien zu Grundlinien und irgend einen Punkt M der Ebene zur gemeinschaftlichen Spitze haben. — Durch einen beliebigen Punkt A der Ebene ziehe man die AB gleich und parallel mit A_1B_2; durch B die BC gleich und parallel mit B_1C_2; durch C die CD gleich und parallel mit C_1D_2. Alsdann ist (§. 45. 5.), wo auch der Punkt M genommen wird: $MA_1B_2 + MBA = AA_1B_2$, oder

$$MA_1B_2 = MAB + AA_1B_2, \text{ und eben so}$$
$$MB_1C_2 = MBC + BB_1C_2,$$
$$MC_1D_2 = MCD + CC_1D_2.$$

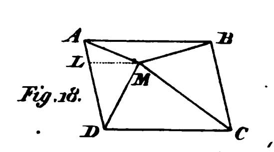


Fig. 18.

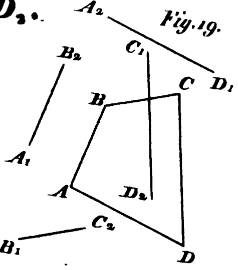


Fig. 19.

Addirt man diese drei Gleichungen, setzt die zu untersuchende Summe der Dreiecke

$$MA_1B_2 + MB_1C_2 + MC_1D_2 = S,$$

die Summe

$$AA_1B_2 + BB_1C_2 + CC_1D_2 = \varDelta,$$

und bemerkt, dass nach §. 45. 3.

$$MAB + MBC + MCD + MDA = ABCD,$$

so kommt:

$$(a) \ldots\ldots\ S = ABCD + \varDelta - MDA.$$

Tritt demnach bei der eben gemachten Construction der specielle Fall ein, dass der letzte Punkt D der gebrochenen Linie $ABCD$ mit dem ersten A zusammenfällt, so wird $MDA = 0$, das Vieleck $ABCD$ geht in eines mit einer um Eins geringern Seitenzahl ABC über, und man erhält:

$$S = ABC + \varDelta,$$

d. h. die Summe S ist für jeden Ort von M von constanter Grösse.

Fällt aber D mit A nicht zusammen, so sey D_1A_2 eine der DA gleiche und parallele Linie, und man hat $MD_1A_2 = MDA + DD_1A_2$, und, wenn man den hieraus fliessenden Werth von MDA in (a) substituirt:

$$S = ABCD + \varDelta + DD_1A_2 - MD_1A_2.$$

Bestimmt man nun den noch willkührlichen Abstand der D_1A_2 von DA so, dass das Dreieck

$$DA_2D_1 = ABCD + \varDelta,$$

so wird ... $S = MA_2D_1$,

und man hat somit eine Linie A_2D_1 gefunden, welche die Eigenschaft besitzt, dass für jeden Ort der gemeinschaftlichen Spitze M die Summe der Dreiecke über

den gegebenen Linien A_1B_2, B_1C_2, C_1D_2 dem Dreiecke über A_2D_1 gleich ist.

§. 47.

Zusätze. *a.* Aus der Gleichung $S = MA_2D_1$ folgt, dass, wenn M in A_2D_1 selbst liegt, $S = 0$ ist, dass für alle Punkte M, welche mit A_2D_1 in einer Parallele liegen, S gleiche Werthe hat, und dass überhaupt der Werth von S dem Abstande des M von A_2D_1 proportional ist.

b. Werden durch A_1B_2, B_1C_2, C_1D_2 Kräfte vorgestellt, so ist A_2D_1 die Resultante derselben. Die Resultante eines Systems von Kräften kann daher ihrer Grösse und den Winkeln nach, welche sie mit den Kräften bildet, auch gefunden werden, wenn man die den Kräften proportionalen Linien, in beliebiger Folge genommen, parallel mit sich so fortbewegt, dass der Anfangspunkt jeder folgenden mit dem Endpunkte der nächstvorhergehenden zusammenfällt, und somit eine zusammenhängende gebrochene Linie entsteht. Die vom Anfangspunkte dieser gebrochenen Linie bis zu ihrem Endpunkte geführte Gerade ist dann der Resultante gleich und parallel. Fallen aber der Anfangs- und Endpunkt der gebrochenen Linie zusammen, so dass die Kräfte nach ihrer parallelen Fortbewegung ein geschlossenes Vieleck bilden, so hat das System keine einfache Resultante, sondern reducirt sich entweder auf ein Paar, oder ist im Gleichgewichte.

c. Kräfte in einer Ebene, die durch die Seiten eines geschlossenen Vielecks ABC... dargestellt werden, sind daher *immer gleichwirkend mit einem Paare oder im Gleichgewichte. Das Moment des Paares ist* ($= 2MAB + 2MBC + \ldots$, also) *dem doppelten In-*

halte des Vielecks gleich, und wenn dieser Inhalt sich $= 0$ *findet, so herrscht Gleichgewicht.* Sind daher z. B. $ABC\ldots$ und $FGH\ldots$ zwei in einer Ebene beliebig gelegene Vielecke von gleichem Inhalte, so sind die zwei Systeme von Kräften AB, BC,... und FG, GH,... von gleicher Wirkung.

d. Ist $ABCD$ ein ebenes Vieleck und sind A', B', C', D' die Projectionen seiner Ecken auf eine in seiner Ebene enthaltene Gerade, — gleichviel, unter welchem Winkel die mit einander parallelen projicirenden Linien die Gerade schneiden, — so ist die Summe der Projectionen der Seiten $= A'B' + B'C' + C'D' + D'A'$, also immer $= 0$; und eben so ist die Summe der Projectionen der Theile einer gebrochenen Linie $ABCD$, $A'B' + B'C' + C'D' = A'D' =$ der Projection der vom Anfange bis zum Ende der gebrochenen Linie gezogenen Geraden. Da nun bei paralleler Fortbewegung einer Linie die Projection derselben ihrer Grösse nach sich nicht ändert, so ist, wenn die Summe der Dreiecke im vorigen §. für alle Punkte der Ebene unverändert bleibt, die Summe der Projectionen der Linien des Systems auf jede Gerade in der Ebene $= 0$. Hat aber das System eine Resultante, so ist die Summe der Projectionen der Projection der Resultante gleich.

Ist, umgekehrt, für eine gewisse Richtung der projicirenden Linien die Summe der Projectionen $= 0$, so schliessen wir, dass, wenn die Linien des Systems durch parallele Fortbewegung zu einer gebrochenen Linie vereiniget werden, der Anfangs- und Endpunkt dieser gebrochenen in einer mit den projicirenden Linien parallelen Linie liegen. Ist daher die Summe der Projectionen für zwei verschiedene Richtungen der projicirenden Linien jedesmal $= 0$, so fallen Anfang und Ende der

gebrochenen Linie zusammen, und es entsteht ein geschlossenes Vieleck, weil sonst die Linie durch den Anfangs- und Endpunkt mit den zwei verschiedenen Richtungen der projicirenden Linien zugleich parallel seyn müsste. Die Bedingung, unter welcher die Summe der Dreiecke von einem Punkte der Ebene zum andern constant ist, kann daher auch dadurch ausgedrückt werden, dass die Summe der Projectionen der Linien des Systems für zwei verschiedene Richtungen der projicirenden Linien, und damit auch für alle andern Richtungen, $=0$ ist. Vergl. §§. 39. und 40.

e. Wenn alle Linien des Systems sich in einem Punkte O schneiden, so ist die Summe der Dreiecke für diesen Punkt, $=0$, also auch für jeden andern Punkt, $=0$, wenn die Summe nicht veränderlich ist. Ist sie aber veränderlich, so hat das System eine durch O gehende Resultante, weil eine veränderliche Summe nur für Punkte der Resultante, $=0$ ist. Nimmt man daher bei der Construction der gebrochenen Linie den Punkt O zum Anfangspunkte, so ist die von O bis zum Endpunkte der gebrochenen gezogene Linie die Resultante selbst, nicht bloss mit ihr parallel. Die Anwendung hiervon auf ein System von nur zwei sich schneidenden Linien führt unmittelbar zu dem geometrischen Satze in §. 34., wie ohne weiteres klar ist.

f. Sind sämmtliche Linien des Systems mit einander parallel, so geht die vorhin gebrochene Linie in eine einzige, mit den Linien des Systems parallele Gerade über. Die Resultante, wenn eine solche statt findet, ist daher ebenfalls den Linien des Systems parallel und der algebraischen Summe derselben gleich.

§. 48.

Aufgabe. Von einem System in einer Ebene enthaltener Kräfte (Linien), sind für drei Punkte A, B, C (Fig. 20.) der Ebene, welche nicht in einer Geraden liegen, die Momente des Systems (die Summen der Dreiecke) $=(A)$, (B), (C) gegeben. Die Resultante, so wie das Moment (M) für irgend einen vierten Punkt M der Ebene, zu finden.

Auflösung. 1) Die Momente (A), (B), (C) sind den Abständen der Punkte A, B, C von der Resultante proportional (§. 47. *a.*). Es verhalten sich aber, wenn die Gerade BC von der Resultante in D geschnitten wird, die Abstände der Punkte B und C von der Resultante wie BD und CD. Man theile daher BC in D so, dass auch hinsichtlich der Vorzeichen $BD:CD=(B):(C)$, und auf gleiche Weise CA in E so, dass $CE:AE=(C):(A)$, so sind D und E zwei Punkte der Resultante, und die Resultante ist somit ihrer Lage nach gefunden. Auch muss, wenn man noch AB in F nach dem Verhältnisse $AF:BF=(A):(B)$ theilt, F in der Resultante, also in DE, liegen. Nimmt man hierauf in DE einen Abschnitt GH von der Länge, dass das Dreieck $AGH=\frac{1}{2}(A)$, [oder $BGH=\frac{1}{2}(B)$, oder $CGH=\frac{1}{2}(C)$,] so ist GH die Grösse der Resultante.

2) Für den Punkt M ist das Moment $(M)=2\,MGH$. Ohne aber zuvor die Resultante GH bestimmt zu haben, kann man aus der gegenseitigen Lage der vier Punkte A, B, C, M und aus den Momenten für die drei ersten das Moment für den vierten auch unmittelbar finden. — Werde BC von AM in N geschnitten,

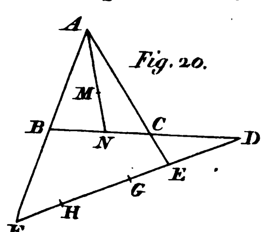


Fig. 20.

und sey (N) das Moment für den Punkt N, so verhält sich, wie vorhin:

$$BD:CD:ND=(B):(C):(N).$$

Man hat aber die identische Gleichung:

$$0=BD(CD-ND)+CD(ND-BD)$$
$$+ND(BD-CD)$$
$$=BD.CN+CD.NB+ND.BC.$$

Substituirt man darin für BD, CD, ND die ihnen proportionalen (B), (C), (N), so kommt:

$$CN.(B)+NB.(C)+BC.(N)=0,$$

die Relation zwischen den Momenten für drei in einer Geraden liegende Punkte. Sie geht hervor, wenn man in der Gleichung zwischen den gegenseitigen Abständen dieser Punkte jeden Abstand mit dem Momente für den jedesmal übrigen Punkt multiplicirt.

Auf gleiche Weise hat man in der Geraden AMN:

$$MN.(A)+NA.(M)+AM.(N)=0.$$

Es verhält sich aber

$$CN:NB=MCN:MNB=ACN:ANB \text{ (§.45.1.), folgl.}$$
$$=CNM-CNA:BMN-BAN$$
$$=CAM:BMA=MCA:MAB,$$

und eben so

$$MN:NA=MBC:ACB.$$

Hiermit werden die vorigen zwei Gleichungen:

$$MCA.(B)+MAB.(C)-(MCA+MAB)(N)=0,$$
$$MBC.(A)+ACB.(M)-(MBC+ACB)(N)=0.$$

Addirt man dieselben, so kommt, weil dabei der Coefficient von (N) sich auf Null reducirt (§. 45. 2.):

$$MBC.(A)+MCA.(B)+MAB.(C)=ABC.(M),$$

welches daher die gesuchte Relation zwischen den Mo-

menten für irgend vier Punkte der Ebene ist. Sie entsteht, wie man sieht, unmittelbar aus der Gleichung (§. 45. 2.) zwischen den vier Dreiecken, die sich aus den vier Punkten bilden lassen, indem man zu jedem dieser Dreiecke das Moment des jedesmal fehlenden Punktes als Factor hinzufügt.

§. 49.

Zusätze. *a.* Aus dem ersten Theile dieser Auflösung fliesst der bekannte Satz, dass das Product aus den drei Verhältnissen, nach denen die drei Seiten eines Dreiecks ABC von einer vierten Geraden DEF geschnitten werden:

$$(BD:CD)(CE:AE)(AF:BF)$$

der Einheit gleich ist.

b. Setzt man in der zuletzt erhaltenen Gleichung statt (A), (B),.. die Werthe dieser Momente: $2AGH$, $2BGH$,..., so kommt:

$$MBC.AGH+MCA.BGH+MAB.CGH \\ =ABC.MGH,$$

eine Gleichung, die immer statt finden muss, wie auch die sechs Punkte A, B, C, G, H, M in der Ebene liegen mögen.

Lässt man M mit H zusammenfallen, so ergiebt sich:

$$HBC.AGH+HCA.BGH+HAB.CGH=0,$$

eine Gleichung zwischen sechs Dreiecken, welche eine gemeinschaftliche Spitze H, und die vier Seiten und zwei Diagonalen eines Vierecks $ABCG$ zu Grundlinien haben.

Viertes Kapitel.

Vom Gleichgewichte zwischen Kräftepaaren im Raume.

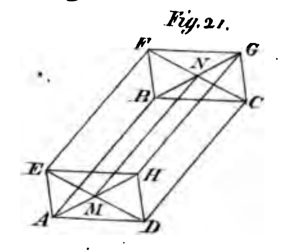
§. 50.

Lehrsatz. Zwei einander gleiche Paare, die in zwei parallelen Ebenen liegen und einerlei Sinn haben, sind gleichwirkend.

Beweis. Sei AB, CD (Fig. 21.) das eine Paar und EG die mit seiner Ebene parallele Ebene des andern Paares EF, GH, welches darin so gelegt worden, dass seine Kräfte mit denen des erstern parallel sind. Man nehme überdies an, dass die vier Punkte A, D, E, H in einer Ebene liegen, und dass daher und wegen der Gleichheit beider Paare die vier Kräfte derselben vier einander parallele Kanten eines Parallelepipedums vorstellen. Sey alsdann M der Durchschnitt von AH mit DE und N der Durchschnitt von BG mit CF, so sind M und N zugleich die Mittelpunkte dieser Linien, und MN ist den vier Kräften gleich und parallel.

Nun ist das Paar AB, CD gleichwirkend mit den Paaren AB, NM und CD, MN. Von diesen ist aber ersteres gleichwirkend mit MN, GH, und letzteres mit NM, EF (§. 17.). Folglich ist das Paar AB, CD gleichwirkend mit MN, GH, NM, EF, d. i. mit dem Paare EF, GH.

Folgerung. Ein Kräftepaar kann daher nicht nur in seiner Ebene, sondern auch in jeder damit parallelen Ebene, wohin man will, verlegt werden, und die Bedingungen fürs Gleichgewicht zwischen Paaren,



die in parallelen Ebenen liegen, sind mit den oben für den Fall gefundenen Bedingungen, wenn die Paare in einer und derselben Ebene enthalten sind, ganz einerlei.

§. 51.

Lehrsatz. Zwei Paare, die in zwei einander nicht parallelen Ebenen liegen, können sich nicht das Gleichgewicht halten, sondern sind gleichwirkend mit einem Paare, dessen Ebene durch die Durchschnittslinie jener Ebene geht, oder (§. 50.) *mit dieser Linie parallel ist.*

Beweis. Ueber einem willkührlich in der Durchschnittslinie genommenen Abschnitte AN (Fig. 22.) beschreibe man in den Ebenen der beiden Paare zwei Parallelogramme $ANCB$ und $ANED$, welche ihrem Sinne und Inhalte nach den Momenten der Paare gleich sind. Alsdann können NC, BA und NE, DA als die beiden Paare selbst angesehen werden. Ist nun von NC und NE die Resultante NG, und von BA und DA die Resultante FA, so sind, wie schon aus §. 15. fliesst, NG, FA einander gleich, parallel und entgegengesetzt und bilden daher ein Paar, dessen Ebene durch NA geht, und welches mit den gegebenen zwei Paaren gleiche Wirkung hat.

Folgerungen. *a.* Drei Paare können nur dann einander das Gleichgewicht halten, wenn ihre Ebenen entweder zusammenfallen, oder einander parallel, oder mit einer und derselben Geraden parallel sind, also überhaupt, wenn ihre Ebenen keine körperliche Ecke bilden. Zwei Paare sind aber nur dann, und dann immer, im Gleichgewichte, wenn sie in einerlei, oder in parallelen Ebenen liegen, von entgegengesetztem Sinne sind und einander gleiche Momente haben.

b. Da zwei Paare, auch wenn sie nicht in einer Ebene liegen, entweder ein resultirendes Paar haben, oder im Gleichgewichte sind, *so wird jedes System von Paaren überhaupt*, indem man die Zahl derselben durch successive Verbindung je zweier immer um eins vermindert, *sich entweder auf ein Paar zurückführen lassen*, *oder im Gleichgewichte seyn*, wenn es die letzten zwei zu verbindenden Paare sind.

§. 52.

Ohne dasjenige zu benutzen, was vom §. 24. an über die Zusammensetzung einfacher Kräfte gelehrt worden, lassen sich mit Hülfe der im vorigen §. gemachten Construction noch folgende Schlüsse bilden.

In der Ebene $CNEG$ nehme man willkührlich einen Punkt M und lege durch ihn MH, MI, MK gleich und parallel mit NC, NE, NG, so ist KM die Resultante von HM und IM, und es sind daher die Paare NC, HM und NE, IM zusammen gleichwirkend mit dem Paare NG, KM; folglich (§. 22.) sind die Parallelogramme

$$(a) \ldots\ldots NCHM + NEIM = NGKM,$$

folglich ihre Hälften oder die Dreiecke

$$MNC + MNE = MNG,$$

folglich die Pyramiden, welche diese in einer Ebene liegenden Dreiecke zu Grundflächen und den Punkt A zur gemeinschaftlichen Spitze haben,

$$MNCA + MNEA = MNGA,$$

drei Pyramiden, welche man auch als solche betrachten kann, deren gemeinschaftliche Spitze M ist, und deren Grundflächen NCA, NEA, NGA in den Ebe-

nen der Paare NC, BA; NE, DA; NG, FA liegen und den halben Momenten dieser Paare gleich sind. Es ist aber M ein willkührlicher Punkt in der Ebene CNE, und diese Ebene ist selbst willkührlich, weil es der Punkt N in dem Durchschnitte der Ebenen AC, AE und die Winkel ANC, ANE sind; folglich ist M ein willkührlicher Punkt im Raume überhaupt, und wir sind somit zu folgendem Satze gelangt:

Wenn die Ebenen zweier Paare und ihres resultirenden Paares sich in einem Punkte N (folglich in einer und derselben durch diesen Punkt gehenden Geraden) schneiden, so ist von den drei Pyramiden, welche einen beliebigen andern Punkt M zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und deren Grundflächen in den Ebenen der Paare liegen und den Momenten der letztern proportional sind, die Summe der zwei Pyramiden, welche den zwei zusammenzusetzenden Paaren angehören, der Pyramide des resultirenden Paares gleich.

Uebrigens müssen hierbei noch die Zeichen der Pyramiden gehörig beachtet werden. Denn in der Gleichung (a) bekommen je zwei Parallelogramme nur dann einerlei Zeichen, wenn die Paare, zu denen sie gehören, von einerlei Sinne sind, und nachdem je zwei dieser Paare, wie NC, HM und NE, IM, einerlei oder entgegengesetzten Sinn haben, erscheinen offenbar die Paare NC, BA und NE, DA, wenn von M auf die Ebene des jedesmaligen Paares herabgesehen wird, mit einerlei oder entgegengesetztem Sinne. Mithin müssen sich auch die Vorzeichen der Pyramiden nach dem Sinne richten, mit welchem die Paare, über deren Flächen sie construirt sind, von M aus betrachtet, sich zeigen.

Der eben erwiesene Satz gilt aber nicht nur für

zwei, sondern auch für jede grössere Anzahl zusammenzusetzender Paare. Denn werden zwei Paare kurz durch p und p', und ihr resultirendes Paar durch r bezeichnet, und drückt Mp die Pyramide aus, deren Spitze M, und deren Grundfläche ihrer Lage und Grösse nach das Parallelogramm des Paares p ist, u. s. w., so ist, wenn die Ebenen der drei Paare durch einen und denselben Punkt N gehen:

$$Mp + Mp' = Mr.$$

Kommt nun zu den Paaren p, p' ein drittes p'', dessen Ebene gleichfalls durch N gehe, — gleichviel, ob sie auch durch die gemeinschaftliche Durchschnittslinie von p, p', r geht, oder nicht, — und giebt dieses Paar p'' in Verbindung mit p und p', oder mit r, das Paar r' als resultirendes, so hat man, wenn auch die Ebene von r' durch N gelegt wird, $Mr + Mp'' = Mr'$, folglich

$$Mp + Mp' + Mp'' = Mr',$$

und so fort bei noch mehrern durch denselben Punkt N gelegten Paaren, wenn auch hier je zwei Pyramiden mit einerlei oder entgegengesetzten Zeichen genommen werden, je nachdem die Paare, zu denen sie gehören, von M aus gesehen, mit einerlei oder entgegengesetztem Sinne erscheinen.

Hat man daher ein System von Paaren im Raume, deren Ebenen sich in einem und demselben Punkte N schneiden, so ist die algebraische Summe der Pyramiden, welche irgend einen andern Punkt M zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und deren Grundflächen in den Ebenen der Paare liegen und den Momenten der letztern proportional sind, gleich einer Pyramide mit derselben Spitze M und mit einer

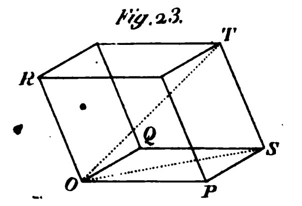
Grundfläche, die in der durch N gelegten Ebene des resultirenden Paares enthalten und dem Momente desselben proportional ist.

Haben aber die Paare kein resultirendes, sondern sind sie im Gleichgewichte, so ist für jeden Ort von M die Summe der Pyramiden null. Denn weil dann jedes der Paare, z. B. p, im entgegengesetzten Sinne genommen, das resultirende der jedesmal übrigen ist, und mit dem Sinne eines Paares zugleich das Zeichen seiner Pyramide in das entgegengesetzte verwandelt wird, so hat man $-Mp = Mp' + Mp'' + \ldots$, folglich $Mp + Mp' + Mp'' + \ldots = 0$.

§. 53.

Kehren wir noch einmal zu der in §. 51. gemachten Construction zurück und nehmen an, dass die in den Ebenen der zwei zusammenzusetzenden Paare über dem Durchschnitte AN dieser Ebenen beschriebenen, den Momenten der Paare gleichen Parallelogramme AC, AE (Fig. 22.) rechtwinklich gemacht worden sind. Alsdann wird in Folge der Construction auch AG ein Rechteck, die zwei Paare CN, AB; EN, AD und ihr resultirendes GN, AF erhalten gleiche Breiten $= AN$, die einfachen Kräfte CN, EN und GN werden folglich den Momenten der Paare proportional, und die Winkel dieser Kräfte werden den Winkeln gleich, unter denen sich die Ebenen der Paare schneiden. Sollen daher zwei in zwei nicht parallelen Ebenen liegende Paare zusammengesetzt werden, so kann man auch so verfahren, dass man zwei den Momenten der Paare proportionale gerade Linien unter demselben Winkel an einander setzt, den die Ebenen der Paare mit einander machen, und von diesen Linien, als Kräfte

Fig. 23.



betrachtet, die Resultante bestimmt. Das Moment des resultirenden Paares ist alsdann dieser Resultante proportional, und seine Ebene macht mit den Ebenen der gegebenen Paare dieselben Winkel, welche die Resultante mit jenen zwei Linien bildet.

Da der Winkel zweier Ebenen immer dem Winkel gleich ist, welchen zwei auf den Ebenen errichtete Normalen mit einander machen, so lässt sich die Regel für die Zusammensetzung zweier Paare auch folgendergestalt abfassen:

Durch einen beliebigen Punkt O lege man zwei, die Ebenen der beiden Paare normal treffende und den Momenten derselben proportionale Linien OP, OQ, und suche die Resultante dieser Linien, welche OR (die Diagonale des Parallelogramms $POQR$) sey. Ein Paar, dessen Ebene normal auf OR, und dessen Moment der OR proportional ist, wird das verlangte resultirende seyn. Dabei ist hinsichtlich des Sinnes der Paare noch zu bemerken, dass, wenn die Richtungen von P nach O, von Q nach O, von R nach O, successive als die Richtung vom Kopfe nach den Füssen des Beschauenden genommen werden, jedes der zugehörigen Paare mit einerlei Sinn erscheinen muss.

Um diese Vorschrift für die Zusammensetzung zweier Paare noch einfacher ausdrücken zu können, wollen wir gerade Linien, die auf den Ebenen der Paare normal stehen, deren Längen sich wie die Momente der Paare verhalten, und deren Richtungen so genommen sind, dass in Bezug auf sie die resp. Paare einerlei Sinn haben, die Axen der Paare nennen. Alsdann ist, wenn die Axen sämmtlich durch einen und denselben Punkt gelegt werden, die Resultante der Axen der zwei zusammenzusetzenden Paare die Axe des resultirenden

Paares; und man übersieht leicht, dass dieselbe einfache Regel auch bei jeder grösseren Zahl zusammenzusetzender Paare ihre Richtigkeit hat, und somit die Zusammensetzung von Paaren in jedem Falle auf die Zusammensetzung einfacher Kräfte, die in einem Punkte sich treffen, zurückgeführt ist. Sind diese durch die Axen der Paare vorgestellten Kräfte im Gleichgewichte, so herrscht auch Gleichgewicht zwischen den Paaren selbst.

§. 54.

Noch eine Methode, Paare, die in verschiedenen Ebenen liegen, zusammenzusetzen, gründet sich auf folgende Betrachtungen.

1) Bei dem Parallelogramm $ABCD$ ist die Kraft CA gleichwirkend mit den Kräften CB, CD; folglich sind BC, CA, AB gleichwirkend mit CD, AB; d. h. drei Kräfte, welche ihrer Richtung und Grösse nach durch die drei Seiten eines Dreiecks dargestellt werden, sind gleichwirkend mit einem Paare, welches in der Ebene des Dreiecks (oder in einer damit parallelen Ebene) liegt, und dessen Moment durch den doppelten Inhalt des Dreiecks ausgedrückt wird. (Vergl. §. 47. *c*.).

2) Seyen A, B, C, D die vier Ecken einer dreiseitigen Pyramide. Man lasse in jeder der sechs Kanten derselben zwei der Kante proportionale und einander entgegengesetzte Kräfte wirken: AB, BA, AC, CA, u. s. w. Diese zwölf, einander zu zweien, und daher auch alle zusammen, das Gleichgewicht haltenden Kräfte kann man aber auch zu dreien so zusammenfassen, dass man vier in den vier Seitenflächen der Pyramide wirkende Paare erhält: nämlich erstens das Paar, worauf sich die drei Kräfte AB, BC, CA in der Ebene ABC reduciren, und dessen Moment der doppelte In-

halt des Dreiecks ABC ist, und eben so noch drei andere Paare, deren Ebenen und Momente durch die Dreiecke CBD, CDA, ADB bestimmt sind.

Vier in den vier Seitenflächen einer Pyramide wirkende Paare, deren Momente den Flächen selbst proportional sind, und welche für den Beschauenden, wenn dessen Richtung vom Kopfe nach den Füssen jedesmal von der äussern nach der innern Seite der Fläche geht, einerlei Sinn haben, halten demnach einander das Gleichgewicht.

3) Werden die Kräfte dreier dieser vier Paare, z. B. der in CBD, CDA, ADB wirkenden, in die entgegengesetzten verwandelt, so dass nunmehr $2.DBC$, $2.DCA$, $2.DAB$ die Momente der Paare ausdrücken, so werden diese Paare zusammen gleichwirkend mit dem vierten, dessen Moment $2.ABC$ ist. Es lassen sich aber die Dreiecke DBC, DCA, DAB auch ansehen als die Projectionen des Dreiecks ABC auf die Ebenen dieser drei Dreiecke durch Linien, welche resp. mit DA, DB, DC parallel sind. Zugleich verhält sich dabei jede in der Ebene ABC enthaltene Fläche, z. B. das Parallelogramm eines Paares, zu ihrer Projection auf eine der drei Ebenen DBC u. s. w., wie das Dreieck ABC zu dem Dreiecke DBC u. s. w.

Projicirt man demnach ein Paar auf drei sich unter beliebigen Winkeln in einem Punkte schneidende Ebenen, und zwar so, dass jedesmal die projicirenden Linien mit dem Durchschnitte der beiden Ebenen, auf welche nicht projicirt wird, parallel sind, so erhält man drei Paare, welche zusammen gleiche Wirkung mit dem erstern Paare haben.

4) Soll daher von mehrern gegebenen Paaren das resultirende Paar gefunden werden, so projicire man

auf besagte Weise jedes der erstern auf drei Ebenen, die sich in einem Punkte schneiden. Die hierdurch in jeder dieser Ebenen entstehenden Paare sind aber (§. 23.) gleichwirkend mit einem einzigen, dessen Moment der Summe der Momente der ersteren gleich ist; und somit reduciren sich alle gegebenen Paare auf drei in den drei Ebenen wirkende, die nun wiederum, durch Verbindung je zweier, zu einem Paare zusammenzusetzen sind.

5) Findet sich in jeder der drei Ebenen das Moment der Projectionen null, so herrscht in jeder der Ebenen, und mithin auch zwischen den gegebenen Paaren selbst, Gleichgewicht; und umgekehrt: sollen die gegebenen Paare im Gleichgewichte seyn, so muss dieses zwischen den Projectionen in jeder Ebene besonders statt finden, und daher das Moment der Projectionen in jeder Ebene null seyn. Denn wäre nur in zwei Ebenen das Moment der Projectionen null, so reducirte sich das System auf ein Paar in der dritten Ebene. Wäre aber bloss in einer oder in gar keiner der drei Ebenen das Moment null, so hätte man zuletzt zwei Paare in zwei nicht parallelen Ebenen, oder drei Paare, deren Ebenen sich nur in einem Punkte schneiden, und es könnte dann nach §. 52. *a.* eben so wenig Gleichgewicht vorhanden seyn.

6) Hat man alle Paare des Systems auf drei in drei coordinirten Ebenen liegende Paare, deren Momente $= L$, M, N seyen, zurückgebracht, und hat man diese drei Paare zu einem einzigen, dessen Moment $= W$, zusammengesetzt, so muss man durch Projection von W auf die drei Ebenen die drei Momente L, M, N selbst wieder erhalten. Denn ergäben sich als Projectionen von W drei Paare, deren Momente L', M',

N' von den vorigen verschieden wären, so müssten, weil L, M, N sowohl, als L', M', N' mit W gleichwirkend sind, die drei Paare, deren Momente $=L'-L$, $M'-M$, $N'-N$, im Gleichgewichte seyn. Dieses ist aber, wie eben gezeigt worden, nicht anders möglich, als wenn $L'-L=0$, $M'-M=0$, $N'-N=0$; folglich u. s. w.

§. 55.

Zusätze. *a.* Ist $ABCD$ ein Viereck, mag es in einer Ebene liegen, oder nicht, so sind die vier Kräfte AB, BC, CD, DA gleichwirkend mit den Kräften AB, BC, CA und AC, CD, DA, also (§. 54. 1.) gleichwirkend mit zwei Paaren, deren Ebenen und Momente die Dreiecke ABC und ACD angeben, folglich immer gleichwirkend mit einem einzigen Paare, das, wenn das Viereck ein ebenes ist, in der Ebene desselben liegt, und zum Momente die doppelte Summe der zwei Dreiecke, d. i. den doppelten Inhalt des Vierecks hat. Auf dieselbe Art kann man bei jedem Vieleck von mehrern Seiten verfahren, indem man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, und kann daher den allgemeinen Satz aufstellen:

Ein System von Kräften, welche ihren Richtungen und Intensitäten nach durch die Seiten irgend eines Vielecks vorgestellt werden, lässt sich immer auf ein Paar reduciren, das, wenn das Vieleck ein ebenes ist, in der Ebene desselben liegt und ein dem doppelten Inhalte des Vielecks gleiches Moment hat.

b. Auf ähnliche Weise lässt sich auch der Satz in Nr. 2. des vorigen §. von der dreiseitigen Pyramide verallgemeinern und auf jedes Polyeder ausdehnen. — Jede Kante eines Polyeders ist die gemeinschaftliche

Seite zweier dasselbe begrenzenden Flächen, und wenn der Sinn jeder dieser Flächen so genommen wird, dass er einem auf ihre Aussenseite herabschauenden Auge bei allen derselbe ist, so hat in den Perimetern je zweier an einander stossenden Flächen die ihnen gemeinschaftliche Seite entgegengesetzte Richtungen; z. B. die Kante BC der obigen Pyramide $ABCD$, als die Seite BC der Fläche ABC, und als die Seite CB der Fläche CBD. Lässt man daher in jeder, ihrem Sinne nach auf die beschriebene Weise genommenen, Fläche jede Seite eine Kraft vorstellen, so halten sich diese Kräfte paarweise das Gleichgewicht. Zugleich aber sind alle zum Perimeter einer und derselben Fläche gehörigen Kräfte mit einem Paare gleichwirkend, dessen Moment dem Inhalte der Fläche proportional ist; und wir schliessen daher:

Ein System von Paaren, deren Ebenen und Momente durch die Flächen eines Polyeders dargestellt werden, und welche, wenn alle Flächen von einerlei Seite (von der äussern oder der innern) betrachtet werden, insgesammt einerlei Sinn haben, ist im Gleichgewichte.

c. Nach §. 54. 6. ist das Moment L der Projection eines Systems von Paaren auf eine beliebige Ebene dem Momente der Projection des resultirenden Paares W auf dieselbe Ebene gleich. Da nun das Moment der Projection eines Paares W auf eine mit seiner Ebene parallele Ebene dem Momente des projicirten Paares selbst gleich ist, was auch die projicirenden Linien mit den zwei parallelen Ebenen für einen Winkel machen; und da, wenn man ein Paar W durch Linien, die in seiner Ebene selbst liegen, auf irgend eine andere Ebene projicirt, das Moment der Projection immer null

ist: so besitzt die Ebene des Paares, worauf sich ein System von Paaren reduciren lässt, und welche Ebene man die Hauptebene des Systems nennt, die zwei Eigenschaften, *dass erstens das Moment der Projection des Systems auf die Hauptebene immer von derselben Grösse ist, unter welchem Winkel auch die projicirenden Linien die Hauptebene schneiden; und dass zweitens, wenn das System durch Linien, welche mit der Hauptebene parallel sind, auf irgend eine andere, mit ihr nicht parallele, Ebene projicirt wird, das Moment der Projection null ist.*

Uebrigens ist schon wegen §. 50. die Lage der Hauptebene nicht vollkommen, sondern nur den Winkeln nach bestimmt, welche sie mit den Ebenen der Paare des Systems bildet; d. h. es giebt ein System paralleler Ebenen, deren jede als die Hauptebene angesehen werden kann.

Eine dritte merkwürdige Eigenschaft der Hauptebene besteht darin, *dass, wenn man die projicirenden Linien die Projectionsebene immer rechtwinklig schneiden lässt, das Moment der Projection auf die Hauptebene grösser ist als das Moment der Projection auf irgend eine andere Ebene.* Denn da das Moment der Projection des Systems immer dem Momente der Projection des resultirenden Paares gleich ist, und dieses Paar in der Hauptebene liegt, so ist unter der Voraussetzung rechtwinkliger Projectionen das Moment der Projection des Systems auf irgend eine Ebene gleich dem Momente des resultirenden Paares, multiplicirt in den Cosinus des Winkels, den diese Ebene mit der Hauptebene macht; folglich am grössten, wenn der gedachte Winkel null ist, also die Projectionsebene mit der Hauptebene parallel geht. — Ist dieser

Winkel ein rechter, steht also die Projectionsebene auf der Hauptebene normal, so ist der Cosinus des Winkels, und daher auch das Moment der Projection des Systems null, wie auch schon daraus folgt, dass dann die projicirenden Linien mit der Hauptebene parallel laufen. Eben so leicht sieht man endlich, *dass für alle Ebenen, welche mit der Hauptebene gleiche Winkel machen, das Moment der Projection von gleicher Grösse ist.*

§. 56.

Alle die vorigen Sätze kann man auch rein geometrisch ausdrücken, indem man dem Systeme der Paare ein System begrenzter Flächen, die in verschiedenen Ebenen liegen, und dem Momente der Projection auf eine beliebige Ebene die Summe der Projectionen der Flächen auf dieselbe Ebene substituirt. Wenn demnach von einem solchen Systeme von Flächen die drei algebraischen Summen ihrer Projectionen auf drei Ebenen, die sich nur in einem Punkte schneiden, einzeln null sind, so ist es auch die Summe ihrer Projectionen auf jede vierte Ebene. Ist aber diese Summe für keine, oder doch nicht für jede der drei Ebenen null, so lässt sich immer eine Ebene angeben, die mit den Ebenen des Systems bestimmte Winkel macht, die Hauptebene des Systems, und in dieser Ebene eine Fläche von bestimmtem Inhalte, die resultirende Fläche, so dass die Summe der Projectionen der gegebenen Flächen auf irgend eine Ebene der Projection der resultirenden Fläche gleich ist; dass daher, wenn nur rechtwinklige Projectionen zugelassen werden, die Summe der Projectionen auf die Hauptebene die grösste unter allen und der resultirenden Fläche selbst gleich ist; u. s. w.

Da endlich ein System von Kräften, welche durch

die Seiten eines Vielecks vorgestellt werden, sich auch dann, wenn das Vieleck kein ebenes ist, auf ein Paar reducirt (§. 55. *a*.), so kann man die eben aufgestellten geometrischen Sätze noch mehr verallgemeinern, indem man, statt in Ebenen enthaltener Flächen, nicht ebene Vielecke, oder selbst in sich zurücklaufende Curven von doppelter Krümmung setzt. So muss es z. B. für jede Curve dieser Art eine Hauptebene geben von der Beschaffenheit, dass wenn man die Curve durch Parallelen mit dieser Ebene auf irgend eine andere damit nicht parallele Ebene projicirt, der Inhalt der Projection $= 0$ ist. Diese Projection muss folglich eine in sich zurücklaufende und dabei sich selbst ein oder mehrere Male schneidende Curve seyn. Vergl. §. 45. 3.

Zusatz. Besteht das System aus begrenzten Ebenen, so kann man zufolge des §. 52. unter die Eigenschaften der Hauptebene noch die setzen, dass, wenn man alle Ebenen des Systems und die Hauptebene durch einen und denselben Punkt gehen lässt, die Summe der Pyramiden, welche irgend einen Punkt zur gemeinschaftlichen Spitze und die begrenzten Ebenen zu Grundflächen haben, der Pyramide gleich ist, welche dieselbe Spitze und die resultirende Fläche in der Hauptebene zur Grundfläche hat.

Diese Gleichung zwischen Pyramiden findet selbst dann noch statt, wenn die Ebenen des Systems sich nicht in einem Punkte schneiden, sondern irgend andere bestimmte Lagen haben. Die Hauptebene, — wenn anders eine solche existirt, und wenn nicht, wie es auch geschehen kann, die Summe der Pyramiden über den Flächen des Systems für jeden Ort der gemeinschaftlichen Spitze von gleicher Grösse ist, — hat dann ebenfalls eine vollkommen bestimmte Lage.

Dieser letztere Satz kann aus dem vorhergehenden leicht vermittelst des Lehnsatzes erwiesen werden, dass die algebraische Summe zweier Pyramiden über zwei einander gleichen, parallelen und ihrem Sinne nach entgegengesetzten Flächen für alle Oerter ihrer gemeinschaftlichen Spitze constant ist. Doch hat dieser Lehnsatz eben so wenig, als der damit erweisbare Satz selbst, einen ihm in der Statik vollkommen entsprechenden.

Fünftes Kapitel.

Vom Gleichgewichte zwischen Kräften im Raume überhaupt.

§. 57.

Seyen AB, CD, EF,... mehrere auf einen festen Körper nach beliebigen Richtungen im Raume wirkende Kräfte. Durch einen beliebigen Punkt N des Körpers lege man $A'B'$, $C'D'$, $E'F'$,... resp. mit AB, CD,... gleich, parallel und nach entgegengesetzten Richtungen, so ist, wie in §. 32., das System der Kräfte AB, CD,... welches S heisse, gleichwirkend mit dem Systeme V der einfachen durch N gehenden Kräfte $B'A'$, $D'C'$,... und dem Systeme W der Paare AB, $A'B'$; CD, $C'D'$;... und es können nun, wie a. a. O., nicht mehr als folgende vier Fälle eintreten: dass entweder jedes der beiden Systeme V und W für sich, oder nur das System V, oder nur W, oder keines von beiden im Gleichgewichte ist; und dass daher das System S selbst entweder im Gleichgewichte ist, oder sich auf ein Paar w (§. 51. b.), oder auf eine einfache

Kraft v, oder auf ein Paar w und eine einfache Kraft v zugleich reducirt.

Letzterer Fall, welches der allgemeinste ist, macht noch eine Erörterung nothwendig. Liegt nämlich v in der Ebene von w, so lassen sich beide auf eine einfache Kraft, wie im zweiten Falle, zurückbringen. Dasselbe gilt auch dann, wenn v mit der Ebene von w parallel läuft; denn man hat nur das Paar w parallel mit sich fortzuführen (§. 50.), bis es mit v in dieselbe Ebene kömmt, und kann es hierauf mit v, wie vorhin, vereinigen.

Schneidet aber v die Ebene von w, so lassen sich die eine Kraft v und die zwei Kräfte von w zwar nicht auf eine, aber doch immer auf zwei reduciren. Denn man verlege das Paar w in seiner Ebene so, dass die eine seiner Kräfte durch den Durchschnitt der Ebene mit v geht, also v selbst schneidet, und verbinde hierauf diese eine Kraft mit v. Die Resultante dieser Verbindung und die andere Kraft des Paares w sind dann die zwei mit v und w gleichwirkenden Kräfte, die, wie überdiess einleuchtet, nicht in einer Ebene liegen.

Eben so können auch umgekehrt zwei Kräfte v und v', welche nicht in einer Ebene enthalten sind, immer in ein Paar und eine einfache Kraft verwandelt werden. Denn legt man durch einen beliebigen Punkt in der Richtung von v' zwei der v gleiche, parallele und einander entgegengesetzte, sich selbst also das Gleichgewicht haltende, Kräfte, so bildet die eine derselben mit v ein Paar, und die andere lässt sich mit v' zu einer die Ebene des Paares schneidenden Kraft zusammensetzen.

Dass aber zwei Kräfte, welche nicht in einer Ebene liegen, also auch ein Paar w und eine die

Ebene desselben schneidende Kraft v, nicht auf eine einzige Kraft reducirbar sind, dass folglich dieses *w* und *v* nicht mit einer einzigen Kraft *v'* ins Gleichgewicht gebracht werden können, dies lässt sich also beweisen. — Gesetzt, es wäre Gleichgewicht zwischen *w*, *v* und *v'* möglich, so kann erstlich die Kraft *v'* mit *v* nicht in einer Ebene liegen. Denn sie würde dann mit *v* entweder im Gleichgewichte seyn, oder mit *v* ein Paar bilden, oder sich mit *v* zu einer einfachen Kraft zusammensetzen lassen. Alsdann bliebe im ersten Falle *w* zurück, im zweiten Falle hätte man nächst *w* ein zweites nicht in der Ebene von *w* liegendes Paar, und im dritten nächst *w* noch eine einfache Kraft, also in keinem der drei Fälle Gleichgewicht. Setzen wir aber zweitens, dass *v* und *v'* nicht in einer Ebene liegen, so lassen sie sich nach dem Vorigen in ein Paar *w'* und eine einfache Kraft umwandeln, und es müsste daher die letztere mit dem aus *w* und *w'* zusammenzusetzenden Paare das Gleichgewicht halten, welches ebenfalls unmöglich ist (§. 18. Zus.); folglich u. s. w.

Nach diesem Allen sind daher bei einem Systeme *S* von Kräften im Raume vier Fälle zu unterscheiden, indem dasselbe entweder im Gleichgewichte ist, oder sich auf ein Paar, oder auf eine einfache Kraft, oder auf zwei nicht in einer Ebene enthaltene Kräfte zurückbringen lässt. Der erste dieser Fälle tritt ein, wenn von den Systemen *V* und *W* jedes für sich im Gleichgewichte ist; der zweite, wenn es nur *V* ist; der dritte, wenn es nur *W* ist, oder wenn *W* sich auf ein Paar reducirt, dessen Ebene mit der Resultante von *V* parallel geht; der vierte, wenn weder *V* noch *W* im Gleichgewichte ist, und die Resultante von *V* und die Ebene des resultirenden Paares von *W* sich schneiden.

Da mit diesen Beziehungen zwischen V und W alle möglichen Fälle erschöpft sind, so sind sie nicht bloss die nothwendigen, sondern auch die hinreichenden Bedingungen, unter welchen das System S im Gleichgewichte ist, oder sich auf ein Paar reduciren lässt, u. s. w. und wir können daher umgekehrt schliessen: Soll in dem Systeme S Gleichgewicht herrschen, so muss von den Systemen S und W jedes für sich im Gleichgewichte seyn; u. s. w.

§. 58.

Das mit W bezeichnete System von Paaren wurde gebildet, indem durch einen beliebigen Punkt N mit den Kräften AB, CD, ... des Systems S gleiche und parallele, aber nach entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräfte $A'B'$, $C'D'$, ... gelegt wurden. Die Momente der Paare AB, $A'B'$; CD, $C'D'$; ..., aus denen W besteht, sind daher den Doppelten der Dreiecke NAB, NCD, ... gleich. Zudem ist das System W so beschaffen, dass die Ebenen seiner Paare sich in einem und demselben Punkte N schneiden, und man kann folglich auf dasselbe den in §. 52. erhaltenen Satz anwenden. Soll demnach das System S, mithin auch das System W (vor. §.), im Gleichgewichte seyn, so muss jenem Satze zufolge die Summe der Pyramiden, welche die Dreiecke NAB, NCD, .. zu Grundflächen und einen beliebigen Punkt M zur gemeinschaftlichen Spitze haben, d. i. die Summe der Pyramiden $MNAB$, $MNCD$, ... also der Pyramiden, welche MN zur gemeinschaftlichen Kante und AB, CD, .. zu gegenüberstehenden Kanten haben, null seyn; und wir haben somit folgendes Theorem gefunden:

Beim Gleichgewichte eines Systems von Kräften,

welche auf einen frei beweglichen Körper nach beliebigen Richtungen im Raume wirken, ist die Summe der Pyramiden, welche eine gemeinschaftliche Kante von beliebiger Lage und Länge, und die Kräfte selbst, ihrer Richtung und Intensität nach, durch gerade Linien vorgestellt, zu gegenüberstehenden Kanten haben, immer gleich null.

Was die Vorzeichen dieser Pyramiden anlangt, so richtet sich jedes, z. B. das Zeichen von $MNAB$, nach dem Sinne, mit welchem das zugehörige Paar AB, $A'B'$ einem von M auf dasselbe herabsehenden Auge erscheint (§. 52.), oder auch, — weil N ein Punkt in $A'B'$ ist, — nach dem durch die Folge der Buchstaben NAB ausgedrückten Sinne aus demselben Gesichtspunkte. Man nehme daher die Richtung MN der gemeinschaftlichen Kante, als die Richtung vom Kopfe nach den Füssen, und bestimme das Zeichen jeder Pyramide, nachdem die Richtung AB der gegenüberliegenden Kante dem ihr zugewendeten Auge nach rechts oder nach links gehend erscheint; oder, was auf dasselbe hinauskommt: man denke sich den Körper, auf welchen die Kräfte wirken, an MN, als einer Axe, befestigt, und gebe dann je zwei Pyramiden einerlei oder entgegengesetzte Zeichen, jenachdem die Kräfte, welche durch die gegenüberliegenden Kanten vorgestellt werden, den Körper um MN nach einerlei oder entgegengesetzten Seiten zu drehen streben.

§. 59.

Beim Gleichgewichte eines in einer Ebene enthaltenen Systems von Kräften war die Summe der Dreiecke, welche irgend einen Punkt M der Ebene zur gemeinschaftlichen Spitze und die Kräfte zu gegenüberliegenden

Seiten hatten, $=0$. Was also dort ein einfacher Punkt M war, geht hier, wo die Kräfte nicht mehr in derselben Ebene liegen, in eine gerade Linie MN über und die dortigen Dreiecke $MAB, \ldots$ verwandeln sich damit in dreiseitige Pyramiden $MNAB, \ldots$ So wie nun in jenem einfachern Falle die Doppelten der Dreiecke $MAB, \ldots$, oder die Parallelogramme, zu denen sie sich ergänzen lassen, die Momente der Kräfte $AB, \ldots$ in Bezug auf den Punkt M hiessen, so wollen wir auf analoge Weise die Sechsfachen der Pyramiden $MNAB, \ldots$ oder die Parallelepipeda, welche MN und AB, u. s. w. zu gegenüberliegenden Kanten haben, jedes derselben mit dem ihm nach der Regel des vorigen §. zukommenden Zeichen genommen, die Momente der Kräfte $AB, \ldots$ in Bezug auf die Gerade oder Axe MN nennen. Die Summe der Momente aller Kräfte des Systems in Bezug auf dieselbe Axe soll, eben so wie bei Systemen in Ebenen, das Moment des Systems selbst rücksichtlich dieser Axe heissen. — Der Satz des vorigen §. lautet damit also:

Ist ein System von Kräften im Raume im Gleichgewichte, so ist für jede beliebige Axe das Moment des Systems null; woraus nach der schon in §. 33. angewendeten Schlussart weiter folgt:

Gleichwirkende Systeme haben in Bezug auf eine und dieselbe beliebige Axe einander gleiche Momente.

Zusatz. Eine der Flächen des Parallelepipedums, von welchem MN und AB zwei gegenüberliegende Kanten sind, ist das Parallelogramm, welches MN und eine von M ausgehende, der AB gleiche und parallele Gerade zu anstossenden Seiten hat. Der Inhalt dieses Parallelogramms ist $= MN . AB . \sin(MN^{\wedge}AB)$. Betrachten wir dasselbe als Grundfläche des Parallelepi-

pedums, so ist die Höhe des letztern gleich dem von einem Punkte der *AB* auf die Grundfläche gefällten Perpendikel, d. i. dem kürzesten Abstande der *AB* von *MN*. Der Inhalt des Parallelepipedums *MNAB*, oder der numerische Werth des Moments der Kraft *AB* in Bezug auf die Axe *MN*, ist daher, wenn wir noch die Länge der Axe $= 1$ setzen, gleich dem Product aus der Kraft in den kürzesten Abstand ihrer Richtung von der Axe und in den Sinus des Winkels dieser Richtung mit der Axe.

Hiermit stimmt auch, wie man leicht wahrnimmt, die gewöhnliche Definition des Moments einer Kraft in Bezug auf eine Axe vollkommen überein. Denn nach dieser Definition wird das Moment erhalten, wenn man die Kraft auf eine die Axe rechtwinklig schneidende Ebene rechtwinklig projicirt und diese Projection (= der Kraft, multiplicirt mit dem Sinus des Winkels ihrer Richtung mit der Axe,) in den Abstand der Projection von der Axe (= dem kürzesten Abstande der Kraft von der Axe) multiplicirt.

Uebrigens soll in dem Folgenden, so lange es nur auf das gegenseitige Verhältniss der Momente, nicht auf ihre absoluten Werthe, ankommt, grösserer Kürze willen die Pyramide *MNAB* selbst, nicht ihr Sechsfaches oder das Parallelepipedum, welches mit ihr zwei gegenüberliegende Seiten gemein hat, als das Moment von *AB* in Bezug auf *MN* genommen werden.

§. 60.

Von einer einzigen Kraft *AB* ist das Moment in Bezug auf die Axe *MN*, oder die Pyramide *MNAB*, nur dann null, wenn *MN* mit *AB* in einerlei Ebene liegt. Eben so ist von zwei Kräften *AB*, *CD*, deren

Richtungen nicht zusammenfallen, die Summe der Momente nicht für jede Axe null. Legt man z. B. die Axe so, dass sie mit AB, nicht aber zugleich mit CD, in einer Ebene liegt, so ist nur von AB, aber nicht von CD das Moment null, also auch nicht die Summe der Momente null *).

Ist demnach ein System von Kräften nicht im Gleichgewichte, sondern gleichwirkend mit einer einfachen Kraft, oder mit einem Paare, oder mit zwei nicht in einer Ebene enthaltenen Kräften (§. 57.), so ist nach vorigem §. das Moment des Systems dem Momente dieser einen oder zwei resultirenden Kräfte gleich, und daher nicht für jede Axe null. Da also, je nachdem zwischen den Kräften eines Systems Gleichgewicht herrscht, oder nicht, das Moment des Systems für jede, oder nicht für jede Axe null ist, so gelten die Sätze des vorigen §. auch umgekehrt, nämlich:

Ist das Moment eines Systems von Kräften im Raume für jede beliebige Axe null, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht; und wenn die Momente zweier Systeme für jede beliebige Axe, auf welche sie gemeinschaftlich bezogen werden, einander gleich sind, so sind die Systeme gleichwirkend.

---

*) Liegen drei Kräfte nicht in einer Ebene, so schneidet nicht jede Axe, welche zweien derselben begegnet, auch die dritte. Für eine Axe, welche blos zwei derselben trifft, ist aber das Moment aller drei Kräfte gleich dem Momente der nicht getroffenen dritten, also nicht null. Drei Kräfte, die nicht in einer Ebene liegen, können sich folglich nicht das Gleichgewicht halten, und zwei Kräfte, die nicht in einer Ebene enthalten sind, können nicht auf eine einzige Kraft reducirt werden. Dasselbe ist schon im §. 57., jedoch auf eine weniger einfache Art, bewiesen worden.

§. 61.

Die Bedingung, dass das Moment des Systems für jede Axe null ist, d. h. dass die Summe der Pyramiden, welche eine gemeinschaftliche Kante und die Kräfte selbst zu gegenüberliegenden Kanten haben, für jede Lage der gemeinschaftlichen Kante sich auf Null reducirt, ist demnach bei Kräften, die auf einen frei beweglichen Körper wirken, die für alle möglichen Richtungen der Kräfte geltende Bedingung des Gleichgewichts, das oberste Princip dieses Gleichgewichts. Aus ihm müssen sich daher die im Früheren erhaltenen Bedingungen für die speciellen Fälle, wenn die Kräfte in einer und derselben Ebene liegen, oder ihre Richtungen in eine und dieselbe Gerade fallen, rückwärts ableiten lassen.

In der That, sind die Kräfte AB, CD,... in einer Ebene enthalten, so werden die Pyramiden $MNAB$, $MNCD$,..., wenn man den willkührlichen Punkt N und damit die Dreiecke NAB, NCD,... in der Ebene selbst nimmt, diesen Dreiecken proportional, und es muss folglich beim Gleichgewichte die Summe dieser Dreiecke null seyn. Fallen aber die Kräfte in eine einzige Gerade, so sind die Dreiecke NAB, NCD,.. gleichfalls in einer Ebene enthalten, und ihnen nicht nur die Pyramiden $MNAB$,..., sondern auch die Kräfte AB,..., also auch die Kräfte den Pyramiden proportional, daher in diesem Falle zum Gleichgewichte nur erfordert wird, dass die Summe der Kräfte selbst null ist.

§. 62.

Wir wollen nunmehr die auf einen Körper wirkenden Kräfte, indem wir sie auf ein beliebiges Coordi-

natensystem beziehen, ihrer Grösse und Richtung nach durch Zahlen ausgedrückt annehmen und die Relationen zu bestimmen suchen, die zwischen diesen Zahlen beim Gleichgewichte statt finden müssen.

Seyen daher, in Bezug auf ein System dreier sich unter beliebigen Winkeln schneidenden Coordinatenaxen, von einer, durch ihre Richtung und Länge die Richtung und Intensität einer Kraft ausdrückenden, Geraden AB die Coordinaten ihrer Endpunkte A und B respectiv

$$x, y, z \text{ und } x+X, y+Y, z+Z.$$

Hierbei sind also x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Richtung der Kraft, welcher Punkt nach der gewöhnlichen Art durch (x, y, z) ausgedrückt werde. X, Y, Z aber sind die Projectionen der auf analoge Weise mit (X, Y, Z) zu bezeichnenden Kraft AB auf die drei Coordinatenaxen. Durch diese Projectionen, die sich ihrer Grösse nach nicht ändern, wenn AB parallel mit sich fortgeführt wird, werden die Grösse und die Winkel von AB mit den Coordinatenaxen bestimmt, so dass (mX, mY, mZ) eine Kraft vorstellt, die mit der Kraft (X, Y, Z) zusammenfällt oder parallel ist und sich zu ihr, wie m zu 1, verhält; also mit ihr im Gleichgewichte ist, oder ein Paar bildet, wenn $m = -1$ ist. — Das Symbol einer in der Ebene der x, y, oder mit ihr parallel wirkenden Kraft ist $(X, Y, 0)$, so wie $(0, 0, Z)$ das Symbol einer Kraft, deren Richtung in die Axe der z fällt, oder mit ihr parallel ist; u. s. w.

Setzen wir noch von der Axe MN, worauf die Kraft AB bezogen werden soll, die Coordinaten der Endpunkte M und N resp.

$$f, g, h \text{ und } f+F, g+G, h+H,$$

so ist jetzt der Inhalt der durch die Coordinaten ihrer Ecken gegebenen Pyramide *MNAB*, als das Moment von *AB* für *MN*, zu entwickeln. Nun könnte zwar der Ausdruck dieses Inhaltes, als bekannt genug aus den Elementen der analytischen Geometrie, vorausgesetzt werden. Indessen will ich eine Entwickelung dieses Ausdrucks hier noch mittheilen, die, analog der in §. 34. und §. 35. gegebenen Entwickelung für eine Dreiecksfläche, auf die Statik selbst gegründet ist, und die wegen des einfachen Aufschlusses, den sie über die Bedeutung und den Zusammenhang der einzelnen Glieder des Ausdrucks giebt, einiger Aufmerksamkeit nicht unwerth seyn dürfte.

§. 63.

Lehnsätze über die Pyramide. 1. Um über das dem Ausdrucke *ABCD* einer Pyramide zukommende Zeichen zu urtheilen, hat man, der in §. 58. gegebenen Vorschrift gemäss, den Kopf nach der im Ausdrucke zuerst gesetzten Ecke *A* und die Füsse nach der zweiten *B* zu bringen, und wenn nun, die Augen nach *CD* gewendet, die Richtung von *C* nach *D* von der rechten nach der linken Hand geht, und die Richtung nach links jedesmal für die positive genommen wird, so hat *ABCD* das positive Zeichen.

Der Ausdruck *ABDC* derselben Pyramide wird daher negativ seyn.

Eben so wird auch der Ausdruck *ACBD* einen negativen Werth haben. Denn lässt man den Kopf in *A*, bringt aber die Füsse nach *C*, so leuchtet ein, dass dann die Richtung von *B* nach *D* rechts gehend erscheinen wird.

Endlich wird auch der Ausdruck *BACD* negativ

seyn. Denn bringt man seinen Körper in eine, der im ersten Falle statt habenden entgegengesetzte, Lage, so dass der Kopf nach B und die Füsse nach A kommen, so wird auch die Richtung CD der dortigen entgegengesetzt, also nach rechts gehend, erscheinen.

Man sieht hieraus, dass die drei Versetzungen $ABDC$, $ACBD$, $BACD$, welche sich ergeben, wenn man in $ABCD$ je zwei neben einander stehende Buchstaben gegenseitig vertauscht, von $ABCD$ das entgegengesetzte Zeichen haben. Da nun durch fortgesetztes Vertauschen je zweier neben einander stehender Elemente nach und nach alle die 24 Permutationen, welche sich aus 4 Elementen bilden lassen, erhalten werden können, so wird man hiermit von allen durch diese Permutationen ausgedrückten Pyramiden die Vorzeichen anzugeben im Stande seyn. Ist nämlich $ABCD$, wie vorhin, positiv, so ist $ACBD$ negativ, $CABD$ positiv, $CADB$ negativ, $CDAB$ positiv, u. s. w.

2. Habe die Pyramide $ABCD$ gegen ein System dreier coordinirter Axen der x, y, z eine solche Lage, dass A in den Anfangspunkt oder den gemeinschaftlichen Durchschnitt der Axen, und B, C, D resp. in die Axen der x, y, z fallen. Den Winkel der Axe der y mit der Axe der x setze man $=\alpha$, und den Winkel der Axe der z mit der Ebene der x, y, $=\beta$. Alsdann ist, ohne Rücksicht auf die Zeichen, der Inhalt des Dreiecks $ABC=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\alpha$, der Abstand des D von der Ebene dieses Dreiecks $=AD.\sin\beta$, und daher der Inhalt der Pyramide $ABCD$

$$=\tfrac{1}{6}r.AB.AC.AD=\Pi, \text{ wo } r=\sin\alpha\sin\beta.$$

Wir wollen nun für jeden der beiden Winkel α und β den Sinn der Drehung, wodurch er bestimmt wird,

so annehmen, dass jeder von ihnen kleiner als 180°, und folglich r positiv wird. Indem wir ferner den Kopf nach A und die Füsse nach B bringen, wollen wir diejenige Richtung (nach rechts, oder links) als die positive setzen, welche CD hat, wenn B, C, D von A nach den positiven Seiten der Axen der x, y, z zu liegen. Da nun alsdann jeder der drei Abschnitte AB, AC, AD positiv ist, so stimmen in diesem Falle der Ausdruck $ABCD$ und sein numerischer Werth Π dem Zeichen nach überein. Es erhellet aber durch unmittelbare Anschauung, dass jedesmal, wenn eine der Ecken B, C, D von der positiven Seite der Axe, worin sie liegt, durch A in die negative übertritt, der Ausdruck $ABCD$ einen Zeichenwechsel erleidet; zugleich aber ändert damit auch der zugehörige Factor von Π sein Zeichen. Mithin wird, unter den gemachten Voraussetzungen, in jedem Falle nicht allein dem absoluten Werthe, sondern auch dem Zeichen nach, durch das Product Π der Inhalt der Pyramide $ABCD$ ausgedrückt.

3. Von zwei auf einen Punkt O (Fig. 23.) wirkenden Kräften OP, OQ ist die Resultante die Diagonale OS des aus den Kräften construirten Parallelogramms. Die Resultante von OS und einer dritten auf O gerichteten Kraft OR, oder die Resultante von OP, OQ, OR, ist die Diagonale OT des aus OS und OR construirten Parallelogramms, d. i. die Diagonale des aus OP, OQ, OR construirten Parallelepipedums, vorausgesetzt, dass die drei Kräfte nicht in einer Ebene liegen. So wie also zwei sich schneidende Kräfte mit Hülfe eines Parallelogramms, so lassen sich drei auf einen Punkt wirkende Kräfte durch Construction eines Parallelepipedums zusammensetzen.

Verbinden wir damit den Satz (§. 59.) von der

Gleichheit der Momente bei gleichwirkenden Systemen von Kräften, so kommt in Bezug auf die Axe MN:

$$MNOP + MNOQ + MNOR = MNOT.$$

Dies giebt uns folgendes, dem in §. 34. aufgestellten Satze analoge, Theorem:

> Die algebraische Summe dreier Pyramiden, welche eine gemeinschaftliche Kante MN haben, und deren gegenüberliegende Kanten von einer gemeinschaftlichen Ecke O ausgehen, ist gleich einer Pyramide, welche dieselbe Kante MN hat, und deren gegenüberliegende Kante die von der Ecke O ausgehende Diagonale des aus erstern drei gegenüberliegenden Kanten construirten Parallelepipedums ist.

Auch lässt sich dieser Satz noch folgendergestalt ausdrücken: Legt man durch eine Ecke O einer Pyramide $MNOT$ drei nicht in einer Ebene enthaltene Axen und projicirt auf jede derselben eine der andern Ecken, T, durch eine Gerade, welche mit der Ebene der beiden Axen, auf welche nicht projicirt wird, jedesmal parallel ist, so ist die Pyramide $MNOT$ der Summe der drei Pyramiden gleich, die hervorgehen, wenn man in dem Ausdrucke der erstern für die Ecke T nach und nach ihre drei Projectionen (P, Q, R) setzt. — Uebrigens sieht man von selbst, dass hierbei OP, OQ, OR die Coordinaten von T in Bezug auf das durch O gelegte Axensystem sind.

§. 64.

Aufgabe. Den Inhalt einer Pyramide $MNAB$ durch die Coordinaten ihrer Ecken auszudrücken.

Auflösung. Man lege durch M, als den Anfangspunkt des Coordinatensystems, die Axen der x, y, z

und nenne N_1, N_2, N_3 die Projectionen von N auf diese Axen durch Linien, welche resp. mit den Ebenen der yz, zx, xy parallel sind; auf gleiche Art seyen A_1, A_2, A_3 die Projectionen von A, und B_1, B_2, B_3 die Projectionen von B auf die Axen. Alsdann ist dem eben erwiesenen Satze zufolge:

$$(a) \ldots MNAB = MN_1AB + MN_2AB + MN_3AB,$$

und eben so

$$(b) \ldots MN_1AB = MN_1A_1B + MN_1A_2B + MN_1A_3B.$$

In (b) ist aber das erste Glied rechter Hand $=0$, weil N_1 und A_1 mit M in einer Geraden, in der Axe der x, liegen. Das zweite Glied ist

$$\begin{aligned} MN_1A_2B &= MN_1A_2B_1 + MN_1A_2B_2 + MN_1A_2B_3 \\ &= MN_1A_2B_3, \end{aligned}$$

weil N_1, B_1 in der Axe der x und A_2, B_2 in der Axe der y liegen, und daher $MN_1A_2B_1$ sowohl, als $MN_1A_2B_2$, $=0$ ist. Gleicherweise findet sich das dritte Glied in (b)

$$MN_1A_3B = MN_1A_3B_2,$$

folglich

$$MN_1AB = MN_1A_2B_3 + MN_1A_3B_2,$$

und eben so

$$\begin{aligned} MN_2AB &= MN_2A_3B_1 + MN_2A_1B_3, \\ MN_3AB &= MN_3A_1B_2 + MN_3A_2B_1. \end{aligned}$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so kommt linker Hand: $MNAB$, zufolge der Gleichung (a), und man erhält, wenn man in den Ausdrücken zur Rechten die Buchstaben so versetzt, dass die Indices stets in der Ordnung 1, 2, 3 auf einander folgen, dass also die drei letzten Ecken jeder Pyramide der Reihe nach in den Axen der x, y, z liegen, und wenn man dabei

die durch die Versetzungen nöthig werdenden Zeichenwechsel nach §. 63. 1. gehörig beobachtet:

$$MNAB = MN_1A_2B_3 + MB_1N_2A_3 + MA_1B_2N_3 \\ - MN_1B_2A_3 - MA_1N_2B_3 - MB_1A_2N_3.$$

Nun wird nach §. 63. 2., wenn man die Coordinaten

von N: $MN_1 = n_1$, $MN_2 = n_2$, $MN_3 = n_3$,
von A: $MA_1 = a_1$, $MA_2 = a_2$, $MA_3 = a_3$,
von B: $MB_1 = b_1$, $MB_2 = b_2$, $MB_3 = b_3$ setzt:

$$MN_1A_2B_3 = \tfrac{1}{6} r n_1 a_2 b_3, \text{ u. s. w., folglich}$$

$$MNAB = \tfrac{1}{6} r [n_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + n_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ + n_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)];$$

und hiermit ist unter der Annahme, dass M der Anfangspunkt der Coordinaten ist, der Werth der Pyramide $MNAB$, durch die Coordinaten der übrigen Ecken ausgedrückt, gefunden.

Ist M nicht der Anfangspunkt, so hat man nur, um diesen Fall auf den hier vorausgesetzten zurückzuführen, die Coordinaten jeder der übrigen Ecken um die auf die entsprechenden Axen sich beziehenden Coordinaten von M zu vermindern.

§. 65.

Nach den Bezeichnungen, welche in §. 62. für die Coordinaten von M, N, A, B gewählt wurden, sind, nach Abzug derer von M, die Coordinaten

von N.... F, G, H,
von A.... $x-f$, $y-g$, $z-h$,
von B.... $x-f+X$, $y-g+Y$, $z-h+Z$.

Substituirt man dieselben für n_1, n_2, n_3, a_1,... in der zuletzt erhaltenen Formel, so ergiebt sich der sechsfache Werth der Pyramide $MNAB$, d. i. das Moment

der auf den Punkt (x, y, z) wirkenden Kraft (X, Y, Z) in Bezug auf eine Axe, deren Endpunkte (f, g, h) und $(f+F, g+G, h+H)$ sind,

$$=rF[(y-g)Z-(z-h)Y]+rG[(z-h)X-(x-f)Z] \\ +rH[(x-f)Y-(y-g)X],$$

wo das Zeichen r die in §. 63. 2. angegebene, von der gegenseitigen Lage der Axen abhängige Bedeutung hat, und dieser zufolge bei einem rechtwinkligen Axensystem $=1$ ist.

Hieraus kann nun leicht weiter das Moment eines Systems von Kräften in beliebiger Anzahl gefunden werden. Denn man hat nur für jede Kraft einzeln ihr Moment nach letzterer Formel zu entwickeln und alle diese Momente zu addiren. Sind daher (X, Y, Z), (X', Y', Z'), (X'', Y'', Z''),... die Kräfte des Systems und resp. (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z''),... beliebige Punkte ihrer Richtungen, so ist, wenn man zur Abkürzung die Summen

$$\begin{aligned} X+X'+X''+\ldots &= A, \\ Y+Y'+Y''+\ldots &= B, \\ Z+Z'+Z''+\ldots &= C, \\ yZ-zY+y'Z'-z'Y'+\ldots &= L, \\ zX-xZ+z'X'-x'Z'+\ldots &= M, \\ xY-yX+x'Y'-y'X'+\ldots &= N \end{aligned}$$

setzt, das Moment des Systems in Bezug auf die durch $f, \ldots H$ bestimmte Axe

$$=rF[L-gC+hB]+rG[M-hA+fC] \\ +rH[N-fB+gA].$$

§. 66.

Soll nun das jetzt betrachtete System von Kräften im Gleichgewichte seyn, so muss das Moment des

Systems für jede Lage der Axe MN, also unabhängig von f, g, h, F, G, H, null seyn. Dies giebt folgende sechs nothwendige Bedingungen des Gleichgewichts:

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0,$$
$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0.$$

In der That wird, wenn man z. B. g, h, G, $H = 0$ setzt, also die Axe MN in der Axe der x liegend und von einer Länge $= F$ annimmt, das Moment des Systems $= rFL$, und daher beim Gleichgewichte $L = 0$. Eben so ist rGM oder rHN das Moment des Systems, wenn die Axe des Moments in die Axe der y oder der z fällt und von der Länge G oder H ist; also beim Gleichgewwichte $M = 0$ und $N = 0$. Setzt man aber bloss h, G, $H = 0$, und lässt daher die Axe der Momente in der Ebene der x, y parallel mit der Axe der x liegen, so wird das Moment $= rF(L - gC)$, folglich beim Gleichgewichte $C = 0$, weil dann, wie schon erwiesen, $L = 0$ ist.

Die sechs Bedingungsgleichungen A, B, ... $N = 0$ sind aber nicht allein nothwendig, sondern auch hinreichend, indem wenn sie erfüllt werden, das Moment für jede Lage der Axe null ist und damit Gleichgewicht statt findet.

Die drei ersten dieser sechs Gleichungen drücken aus, dass die Summen der Projectionen der Kräfte auf die Axen der x, der y und der z einzeln null sind, und die drei letzten bedeuten, dass das Moment des Systems in Bezug auf jede dieser drei Axen einzeln null ist.

Zusatz. Werden die Richtungen der Kräfte eines Systems in die direct entgegengesetzten verwandelt, so gehen die sechs von den Intensitäten und Richtungen

der Kräfte abhängigen Grössen: A, B, ... N über in $-A$, $-B$, ... $-N$.

Bezeichnen ferner bei einem zweiten auf dieselben Coordinatenaxen bezogenen Systeme von Kräften, A', B' ... N' dieselben Functionen der Intensitäten und Richtungen der Kräfte, welche A, B, ... N rücksichtlich des vorigen Systems waren, so sind dieselben Functionen für das aus beiden Systemen zusammengesetzte System: $A+A'$, ... $N+N'$.

Ist folglich das zweite System mit dem ersten gleichwirkend, so hat man, weil dann das zweite System, nachdem die Richtungen seiner Kräfte in die entgegengesetzten verwandelt worden, mit dem ersten verbunden, im Gleichgewichte seyn muss, die sechs Gleichungen: $A-A'=0$, ... $N-N'=0$; d. h.

$$A=A',\ B=B',\ C=C',$$
$$L=L',\ M=M',\ N=N'$$

sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen, unter denen die zwei durch A, ... N und A', ... N' bestimmten Systeme von Kräften gleiche Wirkung haben.

§. 67.

Der Weg, auf welchem wir jetzt zu den Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen Kräften im Raume gekommen sind, ist ganz dem analog, den wir bei einem Systeme von Kräften in einer Ebene befolgten. So wie dort die Bedingungen sich daraus ergaben, dass das Moment des Systems für jeden Punkt der Ebene, worauf es bezogen wurde, null seyn musste, so fanden sich hier die Bedingungen, indem wir den allgemeinen Ausdruck des Moments, unabhängig von den die Axe des Moments bestimmenden Grössen, null setzten; und

eben so, wie die dortige Entwickelung sich bloss auf die Zusammensetzung in einer Ebene wirkender Paare gründete, so wurde auch hier nur die Theorie von Paaren im Raume zu Hülfe genommen, so dass die eine Entwickelung von der andern ganz unabhängig war.

Indessen kann man auch, ohne zuvor die Nullität des Moments für jede Axe bewiesen und den allgemeinen Ausdruck dieses Moments entwickelt zu haben, die Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems im Raume aus denen, welche für ein System in einer Ebene gelten, leicht auf folgende Weise herleiten.

1) Aus der Natur der Projectionen folgt, dass, wenn man eine Kraft P und ihre Projectionen X, Y, Z auf die Axen der x, y, z parallel mit ihren Richtungen an einen Punkt O trägt, die von O ausgehende Diagonale des Parallelepipedums, welches X, Y, Z zu Kanten hat, P selbst ist. Nach dem in §. 63. 3. Bemerkten ist aber bei dieser Lage von P, X, Y, Z die erstere Kraft die Resultante der drei letztern, d. h.: die Kraft (X, Y, Z) ist gleich und parallel der Resultante von den in den Coordinatenaxen wirkenden Kräften X, Y, Z.

2) Zum Gleichgewichte eines Systems S im Raume wird erfordert, dass von den zwei Systemen V und W (§. 57.) jedes für sich im Gleichgewichte ist. Es besteht aber V aus den parallel mit ihren Richtungen durch einen Punkt O gelegten Kräften von S. Man nehme nun für den Punkt O den Anfangspunkt der Coordinaten, so wird die Kraft (X, Y, Z) des Systems S nach ihrer Verlegung auf O gleichwirkend mit den Kräften X, Y, Z in den Axen der x, y, z; und dasselbe gilt auch von den übrigen Kräften (X', Y', Z'), ... des Systems S. Das aus der Verlegung entstehende System V ist

daher gleichwirkend mit den Kräften X, X',... in der Axe der x, den Kräften Y, Y',... in der Axe der y und den Kräften Z, Z',... in der Axe der z. Soll aber dieses System im Gleichgewichte seyn, so muss es jedes der drei Systeme X, X',...; Y, Y',...; Z, Z',... für sich seyn, und daher, wenn, wie in §. 65., $X+X'+\ldots=A$, u. s. w. gesetzt wird, jede der drei Summen A, B, C null seyn. Denn da zwei Kräfte, die nicht in einer Geraden wirken, so wie drei Kräfte, deren Richtungen nicht in eine und dieselbe Ebene fallen, sich nicht das Gleichgewicht halten können, so würde, wenn von den drei Summen A, B, C nur zwei, oder eine, oder keine, null wären, das System eine Resultante haben.

Die erste Bedingung des Gleichgewichts zwischen Kräften im Raume, dass die Kräfte, wenn sie parallel mit sich an einen und denselben Punkt getragen werden, sich das Gleichgewicht halten, wird daher erfüllt, wenn:

$$A=0,\ B=0,\ C=0.$$

3) Die zweite Bedingung für das Gleichgewicht des Systems S ist das Gleichgewicht des Systems der Paare W. Hierzu wird nach §. 54. 5. erfordert, dass, wenn man die Paare auf die Ebene der yz, zx und xy projicirt, in jeder dieser Ebenen für sich die projicirten Paare im Gleichgewichte sind. Das zu dem Systeme W gehörige Paar, welches aus der auf den Punkt (x, y, z) wirkenden Kraft (X, Y, Z) des Systems S und der durch O gehenden Kraft ($-X$, $-Y$, $-Z$) besteht, hat aber zu seiner Projection auf die Ebene der xy ein Paar, dessen Kräfte (X, Y) und ($-X$, $-Y$) resp. auf die Punkte (x, y) und O gerichtet sind; und von diesem Paare ist das Moment = dem Mo-

mente der Kraft (X, Y) in Bezug auf O (§. 31.), $= (xY - yX) \sin\alpha$ (§. 37.). Auf gleiche Weise verhält es sich mit jedem der übrigen Paare des Systems W. Nach der in §. 65. angenommenen Bezeichnung ist daher das Moment aller auf die Ebene der x, y projicirten Paare des Systems W, $= N \sin\alpha$, und folglich Gleichgewicht zwischen ihnen, wenn $N = 0$ ist. Eben so zeigt sich, dass resp. $L = 0$ und $M = 0$ die Bedingungen sind, unter denen die Projectionen von W auf die Ebenen der yz und zx sich das Gleichgewicht halten. Die Bedingungen für das Gleichgewicht des Systems W sind demnach:

$$L = 0, \; M = 0, \; N = 0,$$

welche in Verbindung mit den drei vorigen Gleichungen $A = 0$, u. s. w. die Bedingungen für das Gleichgewicht des Systems S vollständig darstellen.

Zusatz. Aus nr. 2. dieser Entwickelung schliessen wir noch, dass, wenn die Kräfte des Systems ursprünglich auf einen und denselben Punkt wirken, die drei Gleichungen: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, die einzigen zum Gleichgewichte erforderlichen Bedingungen sind, und dass, wenn sie nicht erfüllt werden, das System eine auf denselben Punkt gerichtete Resultante (A, B, C) hat.

§. 68.

Setzt man in den sechs Gleichungen $A, B, \ldots N = 0$ die Projectionen Z, Z, .. und die Coordinaten z, z, .. sämmtlich $= 0$, so werden die Gleichungen C, L, $M = 0$ identisch, und man erhält rückwärts

$$A = 0, \; B = 0, \; N = 0, \text{ wie in §. 38.,}$$

als die einzigen Bedingungen des Gleichgewichts für den speciellen Fall, wenn die Kräfte in einer und derselben Ebene, in der Ebene der x, y, wirken.

Da $(X, Y, 0), \ldots$ und $(x, y, 0), \ldots$ die Projectionen der Kräfte $(X, Y, Z), \ldots$ und der Punkte $(x, y, z), \ldots$ auf die Ebene der x, y sind, so geben die drei Gleichungen A, B, $N = 0$ noch zu erkennen, dass, wenn ein System im Raume im Gleichgewicht ist, auch Gleichgewicht zwischen den auf die Ebene der xy projicirten Kräften desselben statt findet. Eben so wird durch die Gleichungen B, C, $L = 0$ das Gleichgewicht der Projectionen auf die Ebene der yz, und durch die Gleichungen C, A, $M = 0$ das Gleichgewicht der Projectionen auf die Ebene der zx ausgedrückt. Wir folgern hieraus:

Ist ein System von Kräften im Raume im Gleichgewichte, so ist es auch die Projection des Systems auf eine beliebig gelegte Ebene. Ist aber von drei Projectionen eines Systems im Raume auf drei sich nur in einem Punkte schneidende Ebenen jede Projection für sich im Gleichgewichte, so ist es auch das System selbst und mithin auch die Projection desselben auf jede vierte Ebene.

Vermöge der drei Gleichungen, A, B, $C = 0$, gilt der erste Theil dieses Satzes auch von Projectionen eines Systems im Raume auf gerade Linien, *so dass, wenn die Kräfte des Systems im Gleichgewichte sind, zwischen den auf eine beliebige Gerade projicirten Kräften ebenfalls Gleichgewicht herrscht. Wenn aber von drei Projectionen des Systems auf drei nicht in einer Ebene liegende und nicht mit einer Ebene parallele Gerade jede für sich im Gleichgewichte ist, so ist es auch die Projection auf jede vierte Gerade, allein deshalb noch nicht das System selbst.*

§. 69.

Ist ein System von Kräften im Raume nicht im Gleichgewichte, so lässt es sich immer auf zwei Kräfte zurückbringen, die im allgemeinern Falle nicht weiter zu vereinigen sind. Seien (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) diese zwei Kräfte und resp. (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) zwei Punkte ihrer Richtungen. Um die gleiche Wirkung des Systems mit diesen zwei Kräften auszudrücken, hat man nach §. 66. Zusatz die von den Kräften des Systems abhängigen sechs Grössen A, $B, \ldots N$ den eben so durch letztere zwei Kräfte bestimmten Grössen gleich zu setzen. Dies giebt die sechs Gleichungen:

$$A = X_1 + X_2, \quad L = y_1 Z_1 - z_1 Y_1 + y_2 Z_2 - z_2 Y_2,$$
$$B = Y_1 + Y_2, \quad M = z_1 X_1 - x_1 Z_1 + z_2 X_2 - x_2 Z_2,$$
$$C = Z_1 + Z_2, \quad N = x_1 Y_1 - y_1 X_1 + x_2 Y_2 - y_2 X_2.$$

Betrachtet man daher das System, und damit die sechs Grössen A, $B, \ldots N$, als gegeben, und will man die zwei mit ihm gleichwirkenden Kräfte finden, so hat man sechs Gleichungen zwischen zwölf Unbekannten:

$$X_1, \ldots X_2, \ldots x_1, \ldots x_2, \ldots$$

Man kann folglich sechsen der letztern beliebige Werthe geben, hierdurch die sechs übrigen bestimmen und somit auf unendlich viele Arten zwei Kräfte finden, die mit dem gegebenen Systeme gleiche Wirkung haben.

Nur dürfen unter den 6 willkührlich zu nehmenden Grössen nicht solche seyn, zwischen denen allein schon vermöge der sechs Gleichungen, Relationen statt finden; z. B. nicht X_1 und X_2 zugleich, weil durch die Gleichung $A = X_1 + X_2$ mit der einen dieser Grössen auch die andere bestimmt ist.

Eben so wenig können die sechs Coordinaten $x_1, \ldots$ $x_2, \ldots$ beliebig genommen werden. Denn aus den drei letzten der sechs Gleichungen fliesst:

$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = X_2(y_1z_2 - y_2z_1) + Y_2(z_1x_2 - z_2x_1) + Z_2(x_1y_2 - x_2y_1)$$

$$Lx_2 + My_2 + Nz_2 = X_1(y_2z_1 - y_1z_2) + Y_1(z_2x_1 - z_1x_2) + Z_1(x_2y_1 - x_1y_2)$$

und hieraus mit Anwendung der drei ersten Gleichungen:

$$L(x_2 - x_1) + M(y_2 - y_1) + N(z_2 - z_1) = A(y_2z_1 - y_1z_2) + B(z_2x_1 - z_1x_2) + C(x_2y_1 - x_1y_2) \ldots . (\alpha).$$

Die sechs Coordinaten sind daher nicht von einander unabhängig. Vielmehr sieht man aus letzterer Gleichung, dass, wenn die eine Kraft (X_1, Y_1, Z_1) durch einen gegebenen Punkt (a_1, b_1, c_1) geht, die andere in einer damit gegebenen, den Punkt enthaltenden Ebene liegt. Setzt man nämlich in (α) die Coordinaten a_1, b_1, c_1 an die Stelle von x_1, y_1, z_1, so ist die hervorgehende Gleichung zwischen x_2, y_2, z_2 die Gleichung dieser Ebene; und da diese Gleichung, wenn man auch x_2, y_2, z_2 resp. $= a_1, b_1, c_1$ setzt, identisch wird, so geht die Ebene durch den gegebenen Punkt.

Ist umgekehrt die eine Kraft (X_2, Y_2, Z_2) in einer gegebenen Ebene enthalten, deren Gleichung

$$\frac{x_2}{a_2} + \frac{y_2}{b_2} + \frac{z_2}{c_2} = 1 \ldots . . (\beta)$$

sey, so geht die Richtung der andern Kraft (X_1, Y_1, Z_1) durch einen damit gegebenen, in der Ebene begriffenen Punkt. Denn aus der Vergleichung von (β) mit (α) ergiebt sich:

$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = a_2 (L + Bz_1 - Cy_1),$$
$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = b_2 (M + Cx_1 - Az_1),$$
$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = c_2 (N + Ay_1 - Bx_1).$$

Hiermit erhalten x_1, y_1, z_1 bestimmte Werthe, und diese sind die Coordinaten des Punktes, durch welchen die Kraft (X_1, Y_1, Z_1) zu legen ist. Substituirt man endlich die aus den drei letztern Gleichungen fliessenden Werthe von a_2, b_2, c_2 in (β) und setzt x_2, y_2, z_2 resp. $= x_1$, y_1, z_1, so wird (β) identisch; mithin ist der Punkt (x_1, y_1, z_1) gleichfalls in der Ebene (β) enthalten.

In dieser Beziehung entspricht daher jedem Punkte eine durch ihn gehende Ebene und jeder Ebene ein in ihr liegender Punkt. Ist demnach von zwei Kräften, welche mit dem Systeme gleichwirkend sind, die Richtung der einen gegeben, so hat damit auch die Richtung der andern eine bestimmte Lage. Denn sie ist die Durchschnittslinie zweier Ebenen, die irgend zweien Punkten der erstern Richtung entsprechen, oder auch die Linie durch zwei Punkte, welche irgend zweien in der erstern Richtung sich schneidenden Ebenen entsprechen. So wie daher jedem Punkt eine Ebene und jeder Ebene ein Punkt entspricht, so hat auch jede Gerade eine andere ihr entsprechende Gerade. — Weiter unten werden wir auf diesen Gegenstand zurückkommen.

§. 70.

Die zwei Kräfte, worauf sich ein nicht im Gleichgewichte befindliches System mittelst der sechs Gleichungen in §. 69. immer reduciren lässt, sind im Allgemeinen nicht in einer Ebene enthalten. Um daher noch zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die zwei Kräfte in einer und derselben Ebene liegen, er-

wäge man, dass sie dann im Allgemeinen sich auf eine einzige Kraft reduciren, im specielleren Falle aber ein Paar bilden. Da nun jede mit (X_1, Y_1, Z_1) ein Paar bildende Kraft den Ausdruck $(-X_1, -Y_1, -Z_1)$ hat, so wird das System mit einem Paare gleiche Wirkung haben, wenn $X_1+X_2=0$, $Y_1+Y_2=0$, $Z_1+Z_2=0$, also wenn (§. 69.)

$$A=0,\ B=0,\ C=0$$

ist, — was auch schon daraus erhellet, dass alsdann von den zwei Systemen V und W, welche in §. 57. für das System S substituirt wurden, das System V im Gleichgewichte seyn muss. (Vergl. §. 67. 2.).

Die Werthe von L, M, N in §. 69. werden damit, wenn man der Kürze willen

$$x_1-x_2=\xi,\ y_1-y_2=\eta,\ z_1-z_2=\zeta \text{ setzt:}$$

$$L=\eta Z_1-\zeta Y_1,\ M=\zeta X_1-\xi Z_1,\ N=\xi Y_1-\eta X_1;$$

und hieraus lassen sich die Ebene und das Moment des resultirenden Paares bestimmen. Denn zuerst hat man:

$$L\xi+M\eta+N\zeta=0,$$

welches, wenn ξ, η, ζ selbst zu Coordinaten genommen werden, die Gleichung für eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegte, mit der Ebene des Paares parallele Ebene ist. Sodann findet sich

$$L^2+M^2+N^2$$
$$=(X_1^2+Y_1^2+Z_1^2)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-(X_1\xi+Y_1\eta+Z_1\zeta)^2.$$

Lässt man daher das Coordinatensystem ein rechtwinkliges seyn und bestimmt von den zwei Punkten (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) in den Richtungen der Kräfte des Paares den einen so, dass die Gerade,

welche ihn mit dem andern verbindet, die Richtungen rechtwinklig schneidet, so ist

$X_1\xi + Y_1\eta + Z_1\zeta = 0,$

$\sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} =$ der Breite, und

$\sqrt{(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2)} =$ jeder der zwei Kräfte des Paares;

folglich $\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)} =$ dem Momente desselben.

Diess fliesst auch sogleich daraus, dass L, M, N die Momente der auf die drei Coordinatenebenen projicirten Kräfte des Systems in Bezug auf den Anfangspunkt der Coordinaten (§. 67. 3.), also auch die Momente des auf dieselben drei Ebenen projicirten Paares sind, auf welches sich jetzt das System zurückführen lassen soll; und dass, wenn man eine begrenzte Ebene auf drei sich rechtwinklig schneidende Ebenen projicirt, die Summe der Quadrate der Projectionen dem Quadrate der begrenzten Ebene selbst gleich ist.

§. 71.

Wenn die zwei Kräfte, welche mit einem gegebenen Systeme gleichwirkend sind, in einer Ebene liegen und sich darin, wie es im Allgemeinen der Fall ist, auf eine einzige Kraft reduciren lassen, so kann man die Kraft (X_1, Y_1, Z_1) für diese eine nehmen und die andere $(X_2, ..)$ null setzen. Hiermit werden X_2, Y_2, Z_2 einzeln $= 0$, und die sechs Gleichungen in §. 69. gehen über in:

$$A = X_1,\ B = Y_1,\ C = Z_1,$$
$$L = y_1 Z_1 - z_1 Y_1,\ M = z_1 X_1 - x_1 Z_1,$$
$$N = x_1 Y_1 - y_1 X_1.$$

Eliminirt man hieraus X_1, Y_1, Z_1, so kommt:

$$(a) \ldots L = Cy_1 - Bz_1,\quad M = Az_1 - Cx_1,$$
$$N = Bx_1 - Ay_1,$$

und, wenn man noch x_1, y_1, z_1 wegschafft:

$$(A) \ldots\ldots AL + BM + CN = 0,$$

eine Gleichung zwischen A, B, .. N allein, also die Bedingungsgleichung, bei welcher das System auf eine einzige Kraft reducirbar ist. Diese Kraft selbst ist (A, B, C) und die drei Gleichungen (a), von denen, vermöge der Relation (A), eine jede aus den zwei übrigen fliesst, sind die Gleichungen für die Richtung der Kraft. Finden sich daher $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, so hat das System eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Resultante, und umgekehrt.

Da übrigens die Gleichung (A) auch dann erfüllt wird, wenn A, B, $C = 0$ sind, d. i. wenn das System mit einem Paare gleiche Wirkung hat, so erhellet, dass diese Gleichung überhaupt die Bedingung ausdrückt, bei welcher die zwei Kräfte (X_1, Y_1, Z_1) und (X_2, Y_2, Z_2) in einer Ebene liegen, und dass, wenn das System eine einfache Kraft zur Resultante haben soll, zu der positiven durch (A) ausgedrückten Bedingung noch die negative hinzugesetzt werden muss, dass nicht jede der drei Grössen A, B, C null seyn darf.

§. 72.

Zusätze. *a.* Zu der Gleichung (A) kann man noch auf verschiedenen andern Wegen gelangen; am einfachsten wohl folgendergestalt. Man verwandle, wie in §. 57., das System S in zwei andere V und W, von denen V aus den auf den Anfangspunkt der Coordinaten parallel mit sich verlegten Kräften von S besteht, W aber die Kräfte von S selbst und die direct

entgegengesetzten von V enthält. Die Resultante von V ist nun eine durch den Anfangspunkt gehende Kraft v, deren Ausdruck (A, B, C), und es verhält sich daher für jeden Punkt (x, y, z) ihrer Richtung:

$$(v) \ldots\ldots x : y : z = A : B : C.$$

Die Resultante von W ist ein Paar w, dessen Projectionen auf die Coordinatenebenen, $= L, M, N$ sind. Die Ebene dieses Paares hat folglich, wenn sie durch den Anfangspunkt gelegt wird, die Gleichung (§. 70.)

$$(w) \ldots\ldots Lx + My + Nz = 0.$$

Soll nun das System S sich auf eine einfache Kraft reduciren, so muss, wenn W nicht schon für sich im Gleichgewichte, und daher $L, M, N = 0$ sind, die Richtung von v in die Ebene von w fallen. Alsdann aber müssen die den x, y, z proportionalen Werthe aus (v) in (w) substituirt, dieser Gleichung Genüge leisten, und es muss daher seyn: $AL + BM + CN = 0$, wie vorhin.

b. Noch eine andere Herleitung dieser Gleichung ist folgende. Sollen die zwei Kräfte (X_1, Y_1, Z_1) und (X_2, Y_2, Z_2), worauf sich ein System im Raume immer reduciren lässt, in einer Ebene enthalten seyn, so müssen die vier Punkte (x_1, y_1, z_1), $(x_1 + X_1, y_1 + Y_1, z_1 + Z_1)$, $(x_2, \ldots)$, $(x_2 + X_2, \ldots)$ in einer Ebene liegen (§. 62.), oder mit andern Worten: es muss der Inhalt der Pyramide, welche diese vier Punkte zu Ecken hat, $= 0$ seyn. Dieser Inhalt findet sich sogleich, wenn man in der Formel des §. 65. $x_2, y_2, z_2, X_2, Y_2, Z_2$ für f, g, h, F, G, H, und $x_1, \ldots X_1, \ldots$ für $x, \ldots X, \ldots$ schreibt und ist daher:

$$\tfrac{1}{6} r X_2 [(y_1 - y_2) Z_1 - (z_1 - z_2) Y_1] + \ldots$$

$$=\tfrac{1}{6}r\{X_1(y_2Z_2-z_2Y_2)+X_2(y_1Z_1-z_1Y_1)$$
$$+Y_1(z_2X_2-x_2Z_2)+Y_2(z_1X_1-x_1Z_1)$$
$$+Z_1(x_2Y_2-y_2X_2)+Z_2(x_1Y_1-y_1X_1)\}.$$

Es fliesst aber aus den drei letzten der sechs Gleichungen in §. 69.:

$$X_1L+Y_1M+Z_1N=X_1(y_2Z_2-z_2Y_2)+\ldots$$
$$X_2L+Y_2M+Z_2N=X_2(y_1Z_1-z_1Y_1)+\ldots$$

Hiermit wird der Inhalt der Pyramide

$$=\tfrac{1}{6}r\{(X_1+X_2)L+(Y_1+Y_2)M+(Z_1+Z_2)N\}$$
$$=\tfrac{1}{6}r\{(AL+BM+CN\}$$

zufolge der drei ersten jener sechs Gleichungen. Soll daher diese Pyramide verschwinden, und damit das System auf zwei in einer Ebene liegende Kräfte reducirt werden können, so muss $AL+\ldots=0$ seyn.

c. Merkwürdiger Weise giebt also der Ausdruck $\frac{1}{6}r(AL+\ldots)$, — oder $\frac{1}{6}(AL+BM+CN)$ selbst, wenn das Coordinatensystem ein rechtwinkliges ist, — im Allgemeinen den Inhalt der Pyramide an, welche durch die zwei resultirenden Kräfte $(X_1,\ldots)$ und $(X_2,\ldots)$ bestimmt wird; und wir ziehen hieraus den Schluss:

Wie auch ein System von Kräften im Raume auf zwei Kräfte reducirt werden mag, so ist doch immer die Pyramide, welche diese zwei Kräfte zu gegenüberliegenden Kanten hat, von demselben Inhalte.

Sehr einfach lässt sich dieser Satz auch folgendergestalt beweisen. — Sey das System das eine Mal auf die zwei Kräfte PQ, RS, und das andere Mal auf die zwei Kräfte $P'Q'$, $R'S'$ reducirt worden, so sind erstere Kräfte gleichwirkend mit letztern, und es ist

daher in Bezug auf die willkührlich zu nehmende Axe MN (§. 59.):

$$MNPQ + MNRS = MNP'Q' + MNR'S'.$$

Man lasse nun die willkührlichen zwei Punkte M, N resp. mit P, Q zusammenfallen, so wird die Pyramide $MNPQ = 0$, und man erhält:

$$PQRS = PQP'Q' + PQR'S'.$$

Eben so ergiebt sich, wenn man MN nach und nach mit RS, $P'Q'$, $R'S'$ zusammenfallen lässt:

$$RSPQ = RSP'Q' + RSR'S',$$
$$P'Q'PQ + P'Q'RS = P'Q'R'S',$$
$$R'S'PQ + R'S'RS = R'S'P'Q'.$$

Addirt man diese vier Gleichungen, und bemerkt, dass $PQRS = RSPQ$, u. s. w. (§. 63. 1.), so kommt:

$2PQRS = 2P'Q'R'S'$, und damit $PQRS = P'Q'R'S'$,

wie zu erweisen war *).

Vom Gleichgewichte zwischen parallelen Kräften im Raume.

§. 73.

Wir wollen noch die jetzt vorgetragene allgemeine Theorie des Gleichgewichts auf den besondern Fall anwenden, wenn sämmtliche Kräfte des Systems mit

---

*) Der Entdecker dieses merkwürdigen Theorems ist H. Chasles, (siehe Gergonne Annales Tom. XVIII. nr. 12.). Auf die letztere Art habe ich es in Crelle's Journal für die reine und angew. Mathem. IV. Band, pag. 179. dargethan und daselbst durch ganz ähnliche Betrachtungen folgenden viel allgemeineren Satz hergeleitet:

Hat man eine beliebige Anzahl, $= n$, von Kräften, welche auf einen freien festen Körper wirken, und sind diese Kräfte im Gleichgewichte, oder lassen sie sich auf eine einzige Kraft reduciren, so ist die

einer und derselben Geraden parallel sind. Denkt man sich die Kräfte eines solchen Systems nach und nach zu zweien mit einander verbunden, so übersieht man schon im Voraus, dass, da die Resultante zweier parallelen Kräfte, die kein Paar ausmachen, eine mit ihnen parallele Kraft ist (§. 26.), ein solches System im Allgemeinen eine mit jener Geraden parallele einfache Resultante hat, oder sich auf ein Paar reducirt, dessen Ebene mit jener Geraden parallel läuft, oder endlich im Gleichgewichte ist. Die Rechnung hierzu ist folgende.

Sei p ein Abschnitt einer mit den Kräften des Systems parallelen Linie, und von p die Projectionen auf die drei Coordinatenaxen $= a.p,\ b.p,\ c.p$, wo a, b, c aus den Winkeln, welche die drei Coordinatenaxen und p mit einander bilden, bestimmbare Zahlen sind. Alsdann ist, wenn wir die Kräfte (X, Y, Z), (X', Y', Z'), u. s. w. einfach mit P, P', ... bezeichnen:

$$X = aP,\ Y = bP,\ Z = cP,$$
$$X' = aP',\ Y' = bP',\ Z' = cP',$$

u. s. w.; und es werden mit Anwendung des Summationszeichens Σ die sechs den Zustand des Systems bestimmenden Grössen (§. 65.):

$$A = a\Sigma P,\ B = b\Sigma P,\ C = c\Sigma P,$$
$$L = c\Sigma yP - b\Sigma zP,\ M = a\Sigma zP - c\Sigma xP$$
$$N = b\Sigma xP - a\Sigma yP.$$

---

algebraische Summe der $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ dreiseitigen Pyramiden, welche hervorgehen, indem man die Kräfte durch Linien ausdrückt, und je zwei derselben zu gegenüberliegenden Seiten einer Pyramide nimmt, $= 0$. Im allgemeinen Falle aber, wo die n Kräfte sich nicht auf eine, jedoch immer auf zwei Kräfte zurückführen lassen, ist jene Summe von Pyramiden der aus den zwei resultirenden Kräften gebildeten Pyramide selbst gleich.

Hieraus folgt sogleich: $AL + BM + CN = 0$; daher sich ein System paralleler Kräfte, — übereinstimmend mit dem gleich Eingangs Bemerkten, — immer auf zwei in derselben Ebene enthaltene Kräfte, folglich im Allgemeinen auf eine einfache Kraft reduciren lassen muss. Diese Kraft ist $(a\Sigma P, b\Sigma P, c\Sigma P)$, also eine mit den Kräften des Systems parallele Kraft, $P_1 = \Sigma P$, die der algebraischen Summe der letztern gleich ist. Die Gleichung für die Projection dieser Resultante auf die Ebene der yz (§. 71. (a.)) ist:

$$c\Sigma yP - b\Sigma zP = (cy_1 - bz_1)\Sigma P,$$

oder, wenn wir

$$\frac{\Sigma xP}{\Sigma P} = \xi, \ \frac{\Sigma yP}{\Sigma P} = \eta, \ \frac{\Sigma zP}{\Sigma P} = \zeta \text{ setzen:}$$

$$c(\eta - y_1) = b(\zeta - z_1),$$

und eben so sind

$$a(\zeta - z_1) = c(\xi - x_1) \text{ und } b(\xi - x_1) = a(\eta - y_1)$$

die Gleichungen der Projectionen der Resultante auf die Ebenen der zx und xy.

Ist die Summe der Kräfte $P, P', \ldots = 0$, so sind es auch A, B, C, und das System reducirt sich im Allgemeinen auf ein Paar, dessen Ebene, wenn sie durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegt wird, die Gleichung (§. 70.) $Lx + My + Nz =$

$$(bz - cy)\Sigma xP + (cx - az)\Sigma yP + (ay - bx)\Sigma zP = 0$$

hat, und daher mit den Richtungen der Kräfte parallel liegt. Das Moment des Paares ist, unter Annahme rechtwinkliger Coordinaten, $= \sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)} =$

$$\sqrt{[(\Sigma xP)^2 + (\Sigma yP)^2 + \ldots - (a\Sigma xP + b\Sigma yP + \ldots)^2]},$$

indem bei einem rechtwinkligen Coordinatensysteme, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ist.

Wenn endlich nicht nur $\Sigma P = 0$, und damit A, B, $C = 0$, sondern auch L, M, $N = 0$ sind, also sich

$$\Sigma xP : \Sigma yP : \Sigma zP = a : b : c$$

verhalten, so herrscht Gleichgewicht. Da diese Doppelproportion die Stelle zweier Gleichungen vertritt, so sind zum Gleichgewichte eines Systems paralleler Kräfte drei Bedingungsgleichungen nothwendig und hinreichend.

Zusatz. Viel einfacher wird diese ganze Rechnung, wenn man das Coordinatensystem so legt, dass die eine Axe, z. B. die der z, mit den Kräften parallel wird. Hiermit werden $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, und die Bedingungen des Gleichgewichts reduciren sich auf:

$$\Sigma P = 0,\ \Sigma xP = 0,\ \Sigma yP = 0.$$

Wird bloss die erste dieser Gleichungen erfüllt, so ist das System der Kräfte gleichwirkend mit einem Paare, dessen Ebene die Gleichung

$$x\Sigma yP - y\Sigma xP = 0$$

zukommt, und dessen Moment bei rechtwinkligen Coordinaten

$$= \sqrt{[(\Sigma xP)^2 + (\Sigma yP)^2]} \text{ ist.}$$

Ist ΣP nicht $= 0$, so haben die Kräfte eine mit der Axe der z parallele Resultante $= \Sigma P$, welche die Ebene der xy in einem Punkte schneidet, dessen Coordinaten $= \xi$ und η sind.

Sechstes Kapitel.

Weitere Ausführung der Theorie der Momente.

§. 74.

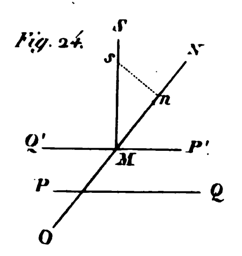
Ist ein System von Kräften im Raume nicht im Gleichgewielite, so ist sein Moment, oder das Moment der zwei Kräfte, auf welche sich das System immer reduciren lässt, von einer Axe zur andern im Allgemeinen veränderlich. Die sehr merkwürdigen Gesetze, nach denen diese Aenderungen sich richten, sollen den Gegenstand unserer nächsten Untersuchungen ausmachen.

Die höchst einfachen Beziehungen, welche bei einem in einer Ebene enthaltenen und auf eine einzige Kraft reducirbaren Systeme zwischen den Momenten desselben oder seiner Resultante für verschiedene Punkte der Ebene statt finden, haben wir in §. 30. und §. 48. kennen gelernt. Die jetzt anzustellenden Untersuchungen werden daher den dortigen zwar verwandt, aber in dem Grade zusammengesetzter seyn, als es überhaupt jede geometrische Untersuchung wird, sobald man sie aus dem Gebiete von zwei Dimensionen in das von drei Dimensionen überträgt.

Relationen zwischen Momenten, deren Axen sich in einem Punkte schneiden.

§. 75.

Alle zu einem Systeme im Raume gehörigen Kräfte kann man auf eine einfache, durch einen beliebig gewählten Punkt M (Fig. 24.) gehende Kraft v und ein Paar w, dessen Kräfte PQ und $P'Q'$ seyen, zurückführen (§. 57.). Die Ebene des Paares und die eine



Kraft $P'Q'$ desselben, nehme man gleichfalls durch M gehend an, was nach §. 50. Folger. immer möglich ist. Alsdann ist in Bezug auf eine durch M gelegte Axe MN das Moment von v sowohl, als von $P'Q'$, null, und daher in Bezug auf dieselbe Axe das Moment des Systems = dem Momente von v und w (§. 59.), = dem Momente von PQ, = dem Sechsfachen der Pyramide $MNPQ$,

$$= 2 MPQ \,.\, MN \,.\, \sin(MPQ \hat{\ } MN).$$

Wenn daher, wie in diesem Kapitel immer geschehen soll, alle Axen, worauf ein System bezogen wird, von gleicher Länge angenommen werden, so hat man folgenden Satz:

Für jeden Punkt M giebt es eine durch ihn gehende Ebene MPQ von der Beschaffenheit, dass das Moment des Systems für jede den Punkt M treffende Axe dem Sinus des von der Axe mit dieser Ebene gebildeten Winkels proportional ist.

§. 76.

Um uns die Verhältnisse, die hiernach zwischen den Momenten für die durch M gehenden Axen statt finden, anschaulicher zu machen, wollen wir von M aus auf die einzelnen Axen, wie MS und MN, Abschnitte, Ms und Mn, tragen, die den Momenten, welche den Axen zukommen, proportional sind. Ist daher MS auf der Ebene MPQ normal, so verhält sich

$$Ms : Mn = 1 : \cos SMN,$$

folglich ist Mns ein rechter Winkel, d. h. der Punkt n liegt in einer um Ms als Durchmesser beschriebenen und daher die Ebene MPQ in M berührenden Kugelfläche; oder mit andern Worten: das Moment jeder durch

M gehenden Axe ist dem von dieser Kugelfläche abgeschnittenen Theile *Mn* der Axe proportional.

So wie nun unter allen durch *M* gehenden Sehnen der Kugel die auf der Berührungsebene in *M* normal stehende Sehne, als Durchmesser, die grösste ist, und alle von *M* ausgehende, mit ihr gleiche Winkel bildende Sehnen einander gleich sind, so hat auch unter allen durch *M* gelegten Axen die auf der Ebene *MPQ* normale Axe das grösste Moment, und allen Axen, die gegen sie unter gleichen Winkeln geneigt sind, kommen Momente von gleicher Grösse zu. So wie ferner die Sehnen, wenn sie in die Berührungsebene selbst zu liegen kommen, in Null übergehen, so ist auch von jeder in dieser Ebene enthaltenen und durch *M* gehenden Axe das Moment = 0. Sind endlich *MN* und *MO* zwei von *M* nach gerade entgegengesetzten Richtungen ausgehende Axen, und schneidet die Gerade, in welcher sie beide liegen, die Kugelfläche in *n*, so wird das Moment einer jeden von ihnen zwar durch dieselbe Gerade *Mn* ausgedrückt. Da aber *n* mit *N* auf einerlei und mit *O* auf entgegengesetzte Seiten von *M* fällt, so stellt *Mn* für die eine Axe ein positives und für die andere ein eben so grosses negatives Moment vor.

Man lege durch *M* eine beliebige Ebene; sie schneidet die Kugelfläche in einem Kreise, von welchem der Durchschnitt der Ebene mit der die Kugel in *M* berührenden Ebene eine Tangente ist. Von den Sehnen dieses Kreises gilt offenbar dasselbe, was so eben von den Sehnen der Kugel bemerkt worden. So wie daher durch jeden Punkt im Raume eine Kugel, so lässt sich durch jeden Punkt einer Ebene in ihr ein Kreis beschreiben, welcher die Eigenschaft besitzt, dass das

Moment jeder durch den Punkt gehenden und in der Ebene enthaltenen Axe der Sehne proportional ist, welche der Kreis von der Axe abschneidet. Unter allen diesen Axen hat daher die den Kreis berührende ein Moment $= 0$, die darauf normale Axe das grösste Moment, u. s. w.

Da übrigens das Sechsfache der Pyramide $MNPQ$ zunächst das Moment der Kraft PQ ausdrückt, so gilt das bisher von den Momenten eines ganzen Systems Gesagte auch von den Momenten einer einzelnen Kraft PQ, d. h. die Momente der Kraft PQ in Bezug auf Axen, die durch M gehen, sind den Theilen dieser Axen, welche in eine die Ebene MPQ in M berührende Kugel fallen, proportional.

§. 77.

Unter allen Momenten, welche einem System in Bezug auf die durch M gehenden Axen zukommen, ist das grösste $= 2MN.MPQ$. Die Richtung seiner Axe und seine Grösse in Vergleich zu den Momenten für die übrigen in M sich schneidenden Axen stellt der von M ausgehende, auf MPQ normale, Durchmesser der Kugel vor. Will man daher in Bezug auf durch M gelegte Axen die Momente nicht bloss von einem, sondern von mehreren Systemen, oder auch von mehreren einzelnen Kräften, mit einander vergleichen, so hat man durch M eben so viele Kugelflächen zu beschreiben, deren von M ausgehende Durchmesser auf den Dreiecken MPQ, welche den einzelnen Systemen oder Kräften angehören, rechtwinklig stehen und den Flächen dieser Dreiecke proportional sind. Ein solcher Durchmesser, welcher, in der Axe des grössten Moments

liegend, diesem Momente proportional ist, werde die Linie des grössten Moments genannt.

Von einer einzelnen Kraft PQ ist daher, rücksichtlich des Punktes M, die Linie des grössten Moments ein in M auf der Ebene MPQ errichtetes und diesem Dreiecke proportionales Perpendikel.

§. 78.

Bei der Reduction eines Systems von Kräften AB, CD, ... auf eine einfache durch M gehende Kraft v und auf ein Paar PQ, $P'Q'$ (§. 75.) entsteht letzteres durch Zusammensetzung von Paaren, welche in den Ebenen MAB, MCD, ... liegen, und deren Momente den Doppelten dieser Dreiecke gleich sind (§. 58.). Diese Zusammensetzung kann aber nach §. 53. dadurch bewerkstelligt werden, dass man auf den Ebenen MAB, MCD, ... in M Normalen errichtet, ihre Längen diesen Dreiecken proportional macht, und von diesen Linien, als Kräfte betrachtet, die Resultante bestimmt. Denn diese ist auf der Ebene des gesuchten resultirenden Paares PQ, $P'Q'$ rechtwinklig und, wenn $P'Q'$ durch M gelegt wird, dem Dreiecke MPQ proportional.

Nach der im vorigen §. gegebenen Erklärung werden aber durch diese Normalen zugleich die Linien der grössten Momente der einzelnen Kräfte und des von ihnen gebildeten Systems rücksichtlich des Punktes M dargestellt, und wir schliessen daher:

Die in Bezug auf einen gewissen Punkt statt findende Linie des grössten Moments für ein System von Kräften ist die Resultante der durch denselben Punkt gehenden Linien der grössten Momente für die einzelnen Kräfte des Systems.

§. 79.

Aus dem eben entwickelten Satze lässt sich eine nicht uninteressante geometrische Folgerung ziehen. Seyen in Bezug auf den Punkt M die Linien Ms, Ms', ... die Linien der grössten Momente für die Kräfte AB, CD, ...; Ms_1 die Linie des grössten Moments für das System dieser Kräfte. Man beschreibe um Ms, Ms', ... und Ms_1, als Durchmesser, Kugeln und lege durch M eine beliebige Axe MN, welche die Oberflächen dieser Kugeln, ausser in M, resp. noch in n, n', ... und n_1 schneide, so sind die Abschnitte Mn, Mn', ... und Mn_1 die der Axe MN zugehörigen Momente der einzelnen Kräfte AB, CD, ... und des von ihnen gebildeten Systems; folglich $Mn + Mn' + \ldots = Mn_1$, welches uns folgenden Satz giebt:

Beschreibt man durch einen Punkt M mehrere Kugelflächen, legt durch M beliebig eine Gerade und bestimmt auf ihr von M aus einen Abschnitt, welcher der algebraischen Summe der Sehnen gleich ist, die von den Kugelflächen in der Geraden abgeschnitten werden, so ist dieser Abschnitt die Sehne einer neuen durch M gehenden Kugel, deren durch M gelegter Durchmesser, statisch ausgedrückt, die Resultante der durch M gelegten Durchmesser der erstern Kugeln ist.

Auf dieselbe Art, wie die Wirkungen mehrerer sich in einem Punkte schneidender Kräfte auf die Wirkung einer einzigen, denselben Punkt treffenden Kraft reducirt werden können, lassen sich daher auch mehrere sich in einem Punkte schneidende Kugelflächen zu einer einzigen zusammensetzen, und eben so wird man auch mehrere in einer Ebene enthaltene und durch

denselben Punkt gehende Kreise zu einem neuen Kreise vereinigen können.

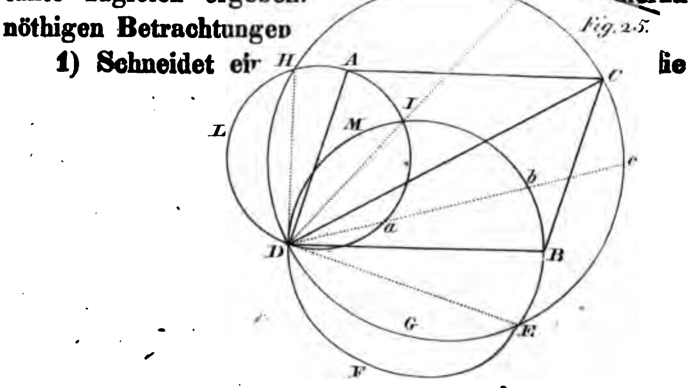
Sind demnach DA, DB (Fig. 25.) zwei anliegende Seiten und DC die Diagonale eines Parallelogramms, und beschreibt man um diese drei Linien, als Durchmesser, Kreise, so ist der dritte Kreis, als durch Zusammensetzung der zwei erstern entstanden, zu betrachten, indem, wenn eine beliebige durch D gezogene Gerade die drei Kreise resp. in a, b, c schneidet, die Sehne Dc des dritten aus den Sehnen Da und Db der beiden ersten zusammengesetzt ist.

Um dieses unmittelbar zu beweisen, erwäge man, dass DaA, DbB, DcC, als in Halbkreisen gelegen, rechte Winkel, und daher Da, Db, Dc die rechtwinkligen Projectionen von DA, DB, DC auf eine und dieselbe Gerade sind. Es ist aber immer die Projection von DC gleich der Summe der Projectionen von DA und AC; und die Projection von AC gleich der Projection von DB, als von einer der AC gleichen und parallelen Linie; folglich $Dc = Da + Db$.

§. 80.

Diese aus statischen Betrachtungen hervorgegangene, jetzt aber rein geometrisch dargestellte und erwiesene Zusammensetzung von Kreisen kann nun hinwiederum zum Vortheil der Statik verwendet werden, indem sich darauf ein neuer Beweis für das Parallelogramm der Kräfte gründen lässt, ein Beweis, der sich von den meisten übrigen dadurch unterscheidet, dass sich bei ihm die Richtung und Grösse der Resultante zugleich ergeben. F... hierzu nöthigen Betrachtungen ...

1) Schneidet ei... ...ie



drei Kreise in a, b, c, und eine zweite Gerade durch D in a', b', c', so sind die drei Bögen aa', bb', cc' einander ähnlich, indem jeder von ihnen die Hälfte des von den beiden Geraden gebildeten Winkels misst. Und umgekehrt: schneidet man von drei, mit D in einer Geraden liegenden, Punkten a, b, c der drei Kreise auf den Kreisen nach einerlei Seite hin drei einander ähnliche Bögen aa', bb', cc' ab, so sind auch a', b', c' mit D in einer Geraden.

2) Werde nun jeder der drei Kreise, die ich nach den Endpunkten ihrer Durchmesser kurz mit A, B, C bezeichnen will, in eine und dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt, und dieses so, dass ein gewisser Theilungspunkt des Kreises A, einer des B, einer des C und D selbst in einer Geraden liegen. Alsdann werden, dem eben Bemerkten zufolge, wenn man von diesen drei Punkten in ihren resp. Kreisen nach einerlei Seite zu weiter fortzählt, je drei gleichvielte Theilpunkte mit D wiederum in einer Geraden seyn.

3) Werde noch bei dieser Eintheilung festgesetzt, dass der den Kreisen gemeinschaftliche Punkt D in jedem von ihnen ein Theilpunkt sey. Da nun, wenn a, b, c irgend drei zusammengehörige Theilpunkte, d. h. drei solche sind, die mit D in einer Geraden liegen, man $Da + Db = Dc$ hat, so muss, wenn a in D fällt, also die Gerade den Kreis A in D berührt, $Db = Dc$ seyn, also b mit c zusammenfallen; d. h. die durch D an den Kreis A gelegte Tangente geht durch den gegenseitigen Durchschnitt E der Kreise B und C. Ist daher, wie verlangt wird, D ein Theilpunkt im Kreise A, so ist auch E ein Theilpunkt in den Kreisen B und C. Damit folglich, der Forderung gemäss, D auch in jedem der zwei letztern Kreise ein Theilpunkt seyn

könne, ist es hinreichend und nothwendig, dass von den Bögen derselben DFE und DGE ein jeder zu seinem ganzen Kreise in einem rationalen Verhältnisse stehe.

Weil aber DEB und DEC, als Winkel in Halbkreisen, rechte Winkel sind, und daher E, B, C in einer Geraden liegen, so misst der Bogen DFE den Winkel $2.DBE = 2.ADB$, und der Bogen DGE den Winkel $2.DCE = 2.ADC$ *). Mithin ist es nur nöthig, dass in dem Parallelogramm $DACB$ jeder der beiden Winkel, welche die Diagonale DC mit den Seiten macht, zu 360° rational ist. Setzen wir daher 360° in m gleiche Theile getheilt, von denen p Theile auf den Winkel ADC, und q auf CDB gehen, so kommen, wenn auch die Peripherie jedes der drei Kreise in m gleiche Theile getheilt wird, auf den Bogen DFE $2(p+q)$ und auf DGE $2p$ solcher Theile, und es liegen, wenn in jedem der drei Kreise D zum ersten Theilpunkt genommen und nach der durch die Folge $DBCA$ bestimmten Richtung herumgezählt wird, der $x$te Theilpunkt des Kreises A, der $(x+2(p+q))$te

---

*) Ueberhaupt ist diese Figur an merkwürdigen Beziehungen reichhaltig. Die Punkte E, H, I, in denen sich die Kreise B und C, A und C, A und B, ausser in D, noch schneiden, liegen in den Seiten BC, AC und der Diagonale AB des Parallelogramms, und die in E, H, I auf BC, AC, AB errichteten Normalen schneiden sich in D. Von diesen Normalen berührt DE den Kreis A, DH den Kreis B, und wenn DI bis nach K an den Kreis C fortgesetzt wird, so ist $DI = IK$. So wie ferner im Obigen die Bögen DFE und DGE, so lassen sich auch alle übrigen Bögen, in welche die drei Kreise einander zerschneiden, durch Winkel im Parallelogramm AB ausdrücken. So sind z. B. die Bögen HLD, DFE, HDE der Kreise A, B, C einander ähnlich und messen einen Winkel $= 2.ADB$. Die Bögen DaI; EbI der Kreise A, B sind sich ähnlich und messen einen Winkel $= 2.DAB$; die Bögen IAH, IHD der Kreise A, B sind sich ähnlich, indem jeder von ihnen einen Winkel $= 2.DBA$ misst; u. s. w.

des Kreises B und der $(x+2p)$te des Kreises C mit D immer in gerader Linie.

4) Wir wollen jetzt von D nach allen $m-1$ übrigen Theilpunkten des Kreises A gerade Linien ziehen, deren jede, ihrer Grösse und Richtung nach, eine auf D wirkende Kraft vorstelle. Auf gleiche Art werde durch die Theilpunkte des Kreises B ein zweites, und durch die Theilpunkte des Kreises C ein drittes System auf D wirkender Kräfte bestimmt. Wegen der Gleichung $Da+Db=Dc$, wenn a, b, c drei zusammengehörige Theilpunkte sind (nr. 3.), ist nun von den diesen Theilpunkten zugehörigen drei Kräften die Kraft in dem Kreise C gleichwirkend mit den beiden andern; und da die Theilpunkte aller drei Kreise zu dreien so zusammen genommen werden können, dass sie mit D in einer Geraden liegen, so wird die Resultante der Kräfte des Kreises A, verbunden mit der Resultante der Kräfte des Kreises B, gleichwirkend mit der Resultante der Kräfte des Kreises C seyn.

5) Betrachten wir aber die Kräfte eines der drei Kreise besonders, so sind je zwei, die von D aus nach gleichweit von D zu beiden Seiten liegenden Theilpunkten des Kreises gerichtet sind, einander gleich und haben daher eine Resultante, welche den durch D gelegten Durchmesser zur Richtung hat. Dieselbe Richtung muss folglich auch der Resultante aller Kräfte des Kreises zukommen.

Offenbar sind ferner je zwei Kreise mit ihren Sehnen, oder den dadurch vorgestellten Kräften, einander ähnliche Figuren, von denen die eine in die andere übergeht, wenn man jede Kraft des einen Kreises in dem Verhältnisse ändert, in welchem sein Durchmesser zu dem Durchmesser des andern steht. In demselben

Verhältnisse werden folglich auch die Resultanten aller Kräfte des einen und des andern Kreises zu einander seyn, so dass die Durchmesser *DA*, *DB*, *DC* nicht allein die Richtungen, sondern auch die Grössenverhältnisse der Resultanten der drei Systeme von Kräften angeben.

6) Zu Folge des in nr. 4. Erwiesenen ist daher von drei durch *DA*, *DB*, *DC* vorgestellten Kräften die letztere gleichwirkend mit den beiden erstern, und somit das Parallelogramm der Kräfte für den Fall dargethan, wenn die Diagonale *DC* mit den Seiten Winkel macht, deren jeder zu 360° in einem rationalen Verhältnisse steht. Die Ergänzung des Beweises für den Fall irrationaler Verhältnisse bleibe dem Leser selbst überlassen.

Von den Axen der grössten Momente.

§. 81.

Ist für einen Punkt *M* die Linie des grössten Moments, welche durch ihre Richtung und Länge die dem Punkte zugehörige Axe des grössten Moments und den Werth desselben angiebt (§. 77.), gegeben, so lässt sich das Moment für jede andere durch *M* gehende Axe sogleich finden. Wie diese Linie des grössten Moments bestimmt werden kann, ist in §. 78. gezeigt worden, und wir wollen nun untersuchen, nach welchem Gesetze die Richtung und Länge dieser Linie von einem Punkte zum andern veränderlich ist.

Sey demnach ein System von Kräften auf eine einfache, durch einen willkührlich angenommenen Punkt *M* gehende Kraft *v* und auf ein Paar *w* reducirt worden. Eben so habe man das System auf eine durch

einen beliebigen andern Punkt M' gehende Kraft v' und auf ein Paar w' zurückgebracht.

Da hiernach v und w gleichwirkend mit v' und w' sind, so sind es auch v, w und $-w'$ mit v'. Die Kraft v muss daher in der Ebene des aus w und $-w'$ resultirenden Paares liegen, oder doch dieser Ebene parallel seyn (§. 57.), und muss mit $-v'$ ein diesem resultirenden Paare das Gleichgewicht haltendes Paar bilden (§. 15. 1.). Die Kräfte v und v' sind folglich einander gleich und haben gleichlaufende Richtungen, und die Ebene dieser Richtungen wird von den Ebenen der Paare w und w' in parallelen Geraden geschnitten (§. 51.). — Ist M' ein Punkt in der Richtung von v selbst, so fallen v und v' zusammen, und haben daher gleiche Wirkung; mithin sind dann auch die Paare w w' einander gleichwirkend, d. i., sie liegen in parallelen Ebenen und haben gleiche Momente.

Dass die Kraft v von einem Punkte M zum andern ihre Richtung und Intensität unverändert behält, geht übrigens auch daraus hervor, dass v die Resultante der an einen Punkt M parallel mit ihren Richtungen getragenen Kräfte des Systems ist.

Weil w mit w' und v', $-v$ gleichwirkend ist, so ist, wenn wir sämmtliche drei Paare auf eine Ebene projiciren, das Moment der Projection von w gleich dem Momente der Projectionen von w' und v', $-v$ (§. 54. 5.). Um ein bestimmteres Bild zu haben, wollen wir uns die gemeinschaftliche Richtung von v und v' vertical aufwärts gehend denken. Lassen wir nun die Projectionsebene horizontal seyn und projiciren darauf rechtwinklig, so ist die Projection des Paares v', $-v$ null und die Momente der Projectionen von w und w' sind einander gleich.

Das Moment der Projection des Paares w auf eine horizontale Ebene ist demnach für alle Punkte M von gleicher Grösse, und mithin das Moment von w selbst am kleinsten für diejenigen Punkte M, für welche sich die Ebene von w horizontal findet.

Um diese Punkte, wenn es anders solche giebt, zu bestimmen, wollen wir die Paare w und w' auf die Ebene des Paares v', $-v$ rechtwinklig projiciren. Nach obigem Satze von den Projectionen ist alsdann das Moment der Projection von w gleich der Summe der Momente des in der Projectionsebene liegenden Paares v', $-v$ selbst und der Projection von w'. In dem Falle nun, wenn w' horizontal, also auf der Projectionsebene rechtwinklig ist, ist das Moment seiner Projection null, folglich haben dann die Projection des Paares w und das Paar v', $-v$ gleiche Momente; und weil immer die Durchschnittslinien der Ebenen von w und w' mit der Ebene von (v', $-v$) einander parallel sind, jetzt aber w' horizontal seyn soll, so sind jetzt die beiden Durchschnitte von w und w' mit der verticalen Ebene von (v', $-v$) horizontal. Dies giebt zur Bestimmung der Punkte M', für welche w' horizontal ist, folgende Regel:

Man lege durch die irgend einem Punkte M zugehörige Kraft v eine (verticale) Ebene so, dass sie die Ebene des demselben Punkte zukommenden Paares w in einer horizontalen schneidet. Auf diese Ebene projicire man das Paar w rechtwinklig und ergänze die Kraft $-v$ durch eine zweite v' in derselben Ebene zu einem Paare, welches mit der Projection von w einerlei Moment hat. Jedes Paar w', das einem Punkte M' in der Richtung von v' zukommt, wird alsdann eine horizontale Lage haben.

Sind umgekehrt die sich rechtwinklig schneidenden

v' und w' gegeben, und legt man durch irgend einen Punkt M eine der v' parallele und gleiche Kraft v, so ist das Paar, welches aus der Zusammensetzung der Paare w' und v', $-v$ entspringt, das dem M zugehörige. Die Ebene desselben schneidet die Ebene von (v', $-v$) in einer Horizontalen, sein Moment aber und sein Winkel mit dem horizontalen w' ist um so grösser, je grösser das Moment des Paares v', $-v$ ist, je weiter also M von v' entfernt liegt.

§. 82.

Dieses vorausgeschickt ist nun die Bestimmung der jedem Punkte M zugehörigen Linie des grössten Moments ganz leicht. Diese Linie steht nach §. 77. auf dem w des Punktes rechtwinklig und ist dem Momente dieses Paares proportional; sie ist daher dasselbe, was wir in §. 53. die Axe des Paares nannten. Da nun die Resultante der Axen zweier zusammenzusetzenden Paare die Axe des resultirenden Paares ist (ebendas.), und da jetzt das Paar w aus der Zusammensetzung der Paare w' und v', $-v$ hervorgeht, so ist die Linie des grössten Moments für den Punkt M die Resultante der Linie des grössten Moments für einen in v' liegenden Punkt M' und der nach demselben Massstabe bestimmten Axe des Paares v', $-v$. Die hierzu nöthige Construction ist folgende.

Sey, wie im Vorigen, v' auf w' rechtwinklig; AB (Fig. 26.) stelle die Richtung von v' vor; wir wollen sie die **Hauptlinie des Systems** nennen und sie uns wiederum vertical denken. Für jeden ihrer Punkte M' ist die Linie des grössten Moments eine von M' aus auf sie getragene, dem Momente von w' proportionale, Länge $M's'$.

Ist nun M irgend ein anderer Punkt des Raums, und M' der Punkt der Hauptlinie, welcher mit M in einer Horizontalen liegt, so ist MAB die Ebene des Paares v', $-v$; $M'M$ seine Breite, also $M'M.v$ sein Moment und ein auf der Ebene MAB errichtetes, diesem Momente proportionales Perpendikel MO die Axe des Paares. Die Linie des grössten Moments für M wird hiernach gefunden als die Resultante Ms von MO und einer an M der $M's'$ gleich und parallel getragenen MQ, oder, was dasselbe ist, als die Hypotenuse Ms des bei O rechtwinkligen Dreiecks MOs, in welchem Os gleich und parallel der Ms' ist; sie ist daher rechtwinklig auf dem von M auf die Hauptlinie gefällten Perpendikel $M'M$, und ihre Grösse, so wie ihr Winkel mit der Hauptlinie, sind bei einem und demselben Systeme bloss von der Grösse dieses Perpendikels abhängig.

Weil MO proportional mit $M'M.v$ ist, so ist das Verhältniss $MO:M'M$, oder die Tangente des Winkels $MM'O$ proportional mit v, also constant, weil v von einem Punkte M zum andern seine Grösse nicht ändert. Für alle Punkte, welche in einer und derselben durch M' gehenden Horizontalen $M'C$ enthalten sind, liegen daher die zugehörigen O in einer gleichfalls durch M' gehenden Horizontalen $M'D$. Vertical über O in einer Höhe $=M's'$, also in einer durch s' mit $M'D$ gezogenen Parallele $s'E$ liegt der Punkt s. Lässt man daher die Punkte M und s in $M'C$ und $s'E$ sich so fortbewegen, dass die Gerade Ms auf $M'C$ immer normal steht, so ist Ms jederzeit die Linie des grössten Moments für M, und man sieht hieraus deutlich, wie bei wachsender Entfernung des M von M' die Grösse dieser Linie und ihr Winkel mit der Hauptlinie immer zunehmen.

Setzt man den Winkel OsM, oder den Winkel von Ms mit der Hauptlinie, $= \omega$ und den constanten Winkel $CM'D = \alpha$, so ist

$$Ms = \sqrt{(M's'^2 + M'M^2 \operatorname{tang} \alpha^2)} \text{ und } \operatorname{tang} \omega = \frac{M'M}{M's'} \operatorname{tang} \alpha,$$

woraus dasselbe erkannt wird.

Zum Schlusse wollen wir die erhaltenen Resultate in folgenden Sätzen zusammenstellen.

1) *Für alle Punkte, welche in der Fläche eines um die Hauptlinie, als Axe, beschriebenen Cylinders liegen, sind die Linien der grössten Momente einander gleich, berühren insgesammt diesen Cylinder und machen mit der Hauptlinie gleiche Winkel. Für alle Punkte, die in einer und derselben Seitenlinie des Cylinders liegen, sind daher diese Linien einander parallel und in einer Ebene enthalten, die den Cylinder in der Seitenlinie berührt. Für alle Punkte dagegen, welche in dem Durchschnitte der Cylinderfläche mit einer auf der Hauptlinie normalen Ebene, also in einem Kreise, liegen, bilden die zugehörigen Linien die Fläche eines durch Umdrehung um die Hauptlinie erzeugten hyperbolischen Hyperboloids.*

2) *Je weiter ein Punkt von der Hauptlinie absteht, je grösser also der Durchmesser des Cylinders ist, desto grösser ist die zugehörige Linie des grössten Moments und desto mehr nähert sich der Winkel dieser Linie mit der Hauptlinie einem rechten, indem die Tangente desselben dem Abstande des Punktes von der Hauptlinie proportional ist. Für Punkte, die in einer auf der Hauptlinie normalen Geraden liegen, bilden die zugehörigen Linien die Fläche eines hyperbolischen Paraboloids.* Denn indem M in

$M'C$ fortbewegt wird, bleibt Ms einer auf $M'C$ normalen Fläche parallel und trifft fortwährend die zwei Geraden $M'C$ und $s'E$.

3) *Für jeden Punkt in der Hauptlinie fällt die Linie des grössten Moments in die Hauptlinie selbst und ist kleiner, als für jeden andern Punkt, also ein Minimum Maximorum.*

§. 83.

Aufgabe. Die Gleichung für die Hauptlinie und den Werth des kleinsten unter den grössten Momenten zu finden.

Auflösung. Das Coordinatensystem sey ein rechtwinkliges. Beziehen wir nun das System der Kräfte zuerst auf eine Axe t, welche durch den Punkt (f, g, h) geht, eine Länge $=1$ hat und mit den Axen der x, y, z die Winkel φ, χ, ψ macht, so sind die Projectionen der Axe auf die Coordinatenaxen, $=\cos\varphi$, $\cos\chi$, $\cos\psi$, und es ergiebt sich das Moment für diese Axe, wenn wir in dem in §. 65. erhaltenen Ausdrucke des Moments, für F, G, H diese Cosinus substituiren. Bezeichnen wir daher dieses Moment mit T und setzen zur Abkürzung:

$$(1) \ldots L - gC + hB = L_{,}, \quad M - hA + fC = M_{,}, \quad N - fB + gA = N_{,},$$

so wird

$$(2) \ldots T = L_{,} \cos\varphi + M_{,} \cos\chi + N_{,} \cos\psi.$$

Setzen wir ferner

$$\sqrt{(L_{,}^2 + M_{,}^2 + N_{,}^2)} = T', \text{ und}$$

$$(3) \ldots \frac{L_{,}}{T'} = \cos\varphi', \quad \frac{M_{,}}{T'} = \cos\chi', \quad \frac{N_{,}}{T'} = \cos\psi',$$

so ist $(4) \ldots \cos\varphi'^2 + \cos\chi'^2 + \cos\psi'^2 = 1$ und

$$T = T'(\cos\varphi \cos\varphi' + \cos\chi \cos\chi' + \cos\psi \cos\psi').$$

Wegen (4) lassen sich aber φ', χ', ψ' als drei Winkel betrachten, die eine Gerade — sie heisse t' und werde gleichfalls durch (f, g, h) gelegt — mit den Axen der x, y, z bildet; und es ist mithin

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \cos\chi\cos\chi' + \cos\psi\cos\psi' = \cos t^{\wedge}t',$$
$$\text{folglich} \ldots \; T = T'\cos t^{\wedge}t'.$$

Nehmen wir daher bloss φ, χ, ψ veränderlich, so ist der grösste Werth von T, $= T'$ und dafür der Winkel $t^{\wedge}t = 0$, d. h. unter allen durch den Punkt (f, g, h) gehenden Axen t ist t' diejenige, welcher das grösste Moment zukommt; die Winkel dieser Axe mit den Coordinatenaxen sind $= \varphi'$, χ', ψ', und das grösste Moment selbst $= T'$.

Unter den verschiedenen grössten Momenten, welche den verschiedenen Punkten (f, g, h) zugehören, fallen aber die Axen t' aller derjenigen Momente in die Hauptlinie, deren Axen mit v, d. i. mit der Resultante von A, B, C, parallel sind, für welche sich also

$$\cos\varphi' : \cos\chi' : \cos\psi' = A : B : C$$

verhalten. Hiermit folgt aus (3) und (1):

$$\frac{L - gC + hB}{A} = \frac{M - hA + fC}{B} = \frac{N - fB + gA}{C},$$

welches daher zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten f, g, h aller derjenigen Punkte sind, welche nebst ihren Axen in die Hauptlinie fallen; es sind folglich die zwei Gleichungen der Hauptlinie selbst.

Setzen wir zuletzt noch in dem allgemeinen Ausdrucke des Moments (2) die durch φ, χ, ψ bestimmte Richtung der Axe parallel mit der Hauptlinie, also mit der Resultante von A, B, C, so werden

$$\cos\varphi = \frac{A}{D}, \quad \cos\chi = \frac{B}{D}, \quad \cos\psi = \frac{C}{D},$$

wo $D = \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}$, und damit

$$T = \frac{AL_, + BM_, + CN_,}{D}$$

$$= \frac{AL + BM + CN}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}} \text{ wegen (1),}$$

also unabhängig von f, g, h. Alle mit der Hauptlinie parallele Axen haben daher gleiche Momente, deren gemeinschaftlicher Werth der eben gefundene ist. Dieser Werth kommt daher auch dem Momente einer in die Hauptlinie selbst fallenden Axe zu, d. i. dem kleinsten unter den grössten Momenten.

Zusatz. Dass alle mit der Hauptlinie parallele Axen gleiche Momente haben, wird auch leicht aus Fig. 26. erkannt. Denn da Ms die Linie des grössten Moments für den Punkt M, und MQS ein rechter Winkel ist, so ist die der $M's'$ gleiche und parallele Linie MQ dem Momente der in sie fallenden Axe proportional (§. 76.).

Von den Axen, deren Momente null sind.

§. 84.

Noch eine besondere Aufmerksamkeit verdienen diejenigen Axen, in Bezug auf welche das Moment des Systems null ist. Sie ergeben sich unmittelbar aus dem Vorigen, da es unter allen durch einen Punkt M gehenden Axen alle diejenigen und keine andern sind, welche auf der dem Punkte zukommenden Linie des grössten Moments rechtwinklig sind, also in der Ebene des dem M zugehörigen und durch ihn selbst gelegten Paares w liegen. In dieser Beziehung wollen wir die

durch M gelegte Ebene von w die Nullebene des Punktes M nennen.

So wie es nun für jeden Punkt eine Nullebene giebt, so lässt sich auch umgekehrt in jeder Ebene ein Punkt angeben, in Bezug auf welchen sie die Nullebene ist, also ein Punkt, den man den Nullpunkt der Ebene nenne, und welcher die Eigenschaft besitzt, dass von allen in der Ebene enthaltenen Axen bloss für diejenigen, welche den Punkt selbst treffen, das Moment des Systems null ist.

Denn werde die Ebene von der vertikalen Hauptlinie AB (Fig. 26.) im Punkte M' geschnitten und sey $M'C$ eine in der Ebene durch M' gelegte Horizontale, so liegt darin der Nullpunkt M der Ebene und ist von M' um einen Abstand $M'M = M's' \frac{\tang \omega}{\tang \alpha}$ entfernt, wo $M's'$ und α constant sind, und ω den Winkel der Ebene mit dem Horizonte bezeichnet (§. 82.). Ist aber die Ebene mit der Hauptlinie parallel und von ihr um einen Abstand $= x$ entfernt, berührt sie also einen um die Hauptlinie mit einem Halbmesser $= x$ beschriebenen Cylinder, so liegen in der Ebene die Axen, deren Momente null sind, einander parallel und machen mit der Ebene des Horizonts einen Winkel, dessen Tangente $= \frac{x \tang \alpha}{M's'}$. Vergl. §. 82. In diesem Falle ist also der Nullpunkt der Ebene als unendlich entfernt zu betrachten.

Hat man somit den Nullpunkt M einer Ebene gefunden, so kann für eine andere durch M nicht gehende Axe t der Ebene das Moment nicht $= 0$ seyn. Denn ist erstens die Ebene nicht parallel mit der Hauptlinie, so lässt sich unter der hier allein geltenden Voraussetzung, dass die zwei Kräfte, worauf das System re-

ducirbar ist, nicht in einer Ebene liegen, das System auf ein in der Ebene enthaltenes Paar w und auf eine durch M gehende mit der Hauptlinie parallele Kraft v reduciren, und für die Axe t sind nur die Momente der zwei Kräfte, welche das Paar ausmachen, nicht aber das Moment von v, also auch nicht das Moment des Systems, null.

Ist zweitens die Ebene mit der Hauptlinie parallel, und ist p eine der in ihr liegenden parallelen Axen, für welche das Moment des Systems null ist, t irgend eine andere in der Ebene enthaltene Axe, welche p im Punkte N schneidet, so ziehe man durch N (in der Ebene) eine Parallele v mit der Hauptlinie und beschreibe in der Ebene einen Kreis, welcher p in N berühre. Alsdann verhalten sich die Momente in Bezug auf die Axen v und t, wie die in den Kreis fallenden Theile von v und t (§. 76.). Da nun das Moment für v gleich dem kleinsten unter den grössten Momenten ist (§. 83. Zus.), und dieses unter der gemachten Voraussetzung nicht null seyn kann, so kann es auch nicht das Moment für die Axe t seyn.

§. 85.

Die Eigenschaften von Nullebenen und Nullpunkten lassen sich auch ganz leicht aus den oben (§. 69.) analytisch bewiesenen Sätzen herleiten, dass von der einen der beiden Kräfte, worauf ein System reducirbar ist, die Richtung im Allgemeinen nach Willkühr genommen werden kann, und dass, wenn die eine der beiden Kräfte durch einen gegebenen Punkt geht, die andere in einer damit gegebenen, den Punkt enthaltenden Ebene liegt, und umgekehrt. Von diesen Sätzen will

h jetzt noch einen andern auf ganz einfache Betrach-
ngen sich gründenden Beweis mittheilen, und hierauf
n Zusammenhang zwischen ihnen und den Eigenschaf-
n der Nullebenen und Nullpunkte kürzlich angeben.

1) Hat man zwei Kräfte P und P_1 (Fig. 27.), de-
n Richtungen nicht in einer Ebene liegen, und eine
ichtung q, welche mit der einen P der beiden erstern
einer Ebene a liegt, und daher, im Allgemeinen
enigstens, mit P einen Punkt A gemein hat, so ist es
im Allgemeinen immer möglich, die zwei Kräfte in zwei
mit ihnen gleichwirkende Q und Q_1 zu verwandeln, von
denen die eine Q die Richtung q hat.

Denn da P und P_1 mit Q und Q_1 gleichwirkend seyn sollen, so müssen es auch P und $-Q$ mit Q_1 und $-P_1$ seyn. P und $-Q$ haben aber, als zwei Kräfte, deren Richtungen in einer Ebene a liegen und im Punkte A derselben sich schneiden, eine durch den Schneidepunkt A gehende und in der Ebene a enthaltene Resultante R. Diese Resultante R muss daher auch den Kräften Q_1 und $-P_1$ zukommen, es muss folglich auch Q_1 die Resultante von P_1 und R seyn; und da zwei nicht in einer Ebene enthaltene Kräfte nicht auf eine einzige Kraft reducirt werden können (§. 57.), so müssen P_1 und R, so wie auch Q_1, in einer Ebene a_1 enthalten seyn und sich darin, im Allgemeinen wenigstens, in einem Punkte A_1 schneiden. Hiernach ist die Richtung von R bestimmt als der Durchschnitt der Ebene a, in welcher P und Q wirken, mit der durch P_1 und den Schneidepunkt A von P und Q zu legenden Ebene a_1. Da also von den drei Kräften P, $-Q$, $-R$, welche im Gleichgewichte sind, die Richtungen, und von der ersten derselben, P, die

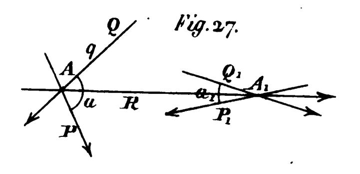


Fig. 27.

Intensität, gegeben sind, so lassen sich auch von Q und R die Intensitäten finden (§. 28. *a.*), und hieraus die Richtung und Intensität von Q_1, als von einer Kraft, welche mit $-R$ und $-P_1$ im Gleichgewichte ist.

2) Wir folgern hieraus weiter: Ist von der Richtung der Kraft Q nur der Punkt A gegeben, in welchem sie die P schneiden soll, so kennt man von der Kraft Q_1 nur die Ebene a_1, in welcher sie mit P_1 liegen muss; es ist nämlich die durch A und P_1 zu legende a_1. Ist aber für Q nur die Ebene a gegeben, in welcher sie mit P liegen soll, so ist von Q_1 nur der Punkt A_1 bekannt, in welchem sie die P_1 schneiden muss; es ist nämlich der Durchschnitt der Ebene a mit P_1.

Wenn demnach von irgend zwei Kräften, die mit zwei nicht in einer Ebene liegenden Kräften P und P_1 gleiche Wirkung haben, die eine der P in einem Punkte A begegnet, so liegt die andere in der durch A und P_1 bestimmten Ebene; und wenn die eine mit P in einer Ebene a liegt, so geht die andere durch den Schneidepunkt von a mit P_1.

3) Auch in dem Falle, wenn die gegebene Richtung von Q nicht, wie vorhin, mit der Richtung von P in einer Ebene liegt, lassen sich im Allgemeinen die Intensität von Q und die Richtung und Intensität von Q_1 so bestimmen, dass Q und Q_1 mit P und P_1 gleichwirkend werden. Denn zieht man eine Gerade s, welche die Richtung von P und Q zugleich schneidet, so kann man nach dem Vorigen P und P_1 zuerst in zwei Kräfte S und S_1 verwandeln, von denen S die Richtung s hat, und kann sodann auf dieselbe Weise aus S und S_1 die mit ihnen, und folglich auch mit P und P_1, gleichwirkenden Kräfte Q und Q_1 herleiten.

4) *Ist daher ein System von Kräften auf zwei nicht in einer Ebene liegende Kräfte reducirbar, so kann die Richtung der einen von beiden im Allgemeinen jede beliebige seyn.* Um so mehr kann folglich das noch Unbestimmtere verlangt werden, dass die eine der beiden Kräfte durch einen beliebig gegebenen Punkt gehe, oder in einer beliebig gegebenen Ebene liege. Der Punkt A und die Ebene a in dem Satze nr. 2. können daher ebenfalls ganz nach Willkühr bestimmt werden, welches uns zu dem Schlusse führt:

In Bezug auf ein System von Kräften, welches auf zwei nicht in einer Ebene liegende Kräfte P und P' reducirt werden kann, entspricht jedem Punkte A eine durch ihn gehende Ebene a_1 und jeder Ebene a ein in ihr liegender Punkt A_1 dergestalt, dass, wenn die eine der beiden Kräfte, P, dem Punkte A begegnet, oder in der Ebene a wirkt, die andere P_1 in der entsprechenden Ebene a_1 enthalten ist, oder den entsprechenden Punkt A_1 trifft.

5) Geht aber die Kraft P durch den Punkt A, und liegt folglich die Kraft P_1 in der dem A entsprechenden Ebene a_1, so schneidet jede durch A gehende und in a_1 enthaltene Axe sowohl die Richtung von P, als die von P_1, und es ist daher in Bezug auf jede dieser Axen das Moment von P und P_1, folglich auch das Moment des Systems, null.

Die einem Punkte A entsprechende Ebene a_1 ist mithin die Nullebene des Punktes, und eben so der einer Ebene a entsprechende Punkt A_1 der Nullpunkt der Ebene.

Zusätze. *a.* Ist a_1 die dem Punkte A entsprechende Ebene, so ist auch A der der Ebene a_1 entspre-

chende Punkt, indem, wenn die eine Kraft P_1 in a_1 wirkt, die andere P dem A begegnen muss; und eben so erhellet, dass wenn der Ebene a der Punkt A_1 entspricht, auch umgekehrt letzterer die erstere zur entsprechenden hat.

b. Ist A ein Punkt der Ebene a, und wird die willkührliche Richtung der Kraft P so genommen, dass sie zugleich durch A geht und in a liegt, so muss die Kraft P_1 wegen des erstern in der Ebene a_1 liegen und wegen des letztern durch den Punkt A_1 gehen; mithin muss A_1 ein Punkt der Ebene a_1 seyn, d. h:

Liegt ein Punkt in einer Ebene, so geht die dem Punkte entsprechende Ebene durch den der Ebene entsprechenden Punkt.

§. 86.

Diese gegenseitigen Beziehungen zwischen Punkten und Ebenen sind eine besondere Art der sogenannten dualen oder reciproken Verhältnisse, welche in der neuern Zeit so mannigfach untersucht worden sind, und wobei zwei Systeme von Punkten und Ebenen in einer solchen Beziehung zu einander betrachtet werden, dass jedem Punkte des einen Systems eine Ebene des andern und jeder Ebene des einen ein Punkt des andern entspricht. Im Gegenwärtigen kommt noch die besondere Bedingung hinzu, dass jeder Punkt in der ihm entsprechenden Ebene selbst liegt, und — was eine Folge davon ist, — jede Ebene den ihr entsprechenden Punkt selbst enthält. Hierdurch werden nicht nur die bei der Dualität im Allgemeinen Statt habenden Beziehungen in etwas modificirt, sondern es treten noch Relationen von eigenthümlicher Beschaffenheit hinzu. Folgende

Sätze geben eine kurze Uebersicht dieser merkwürdigen Beziehungen*).

Zuerst folgt unmittelbar aus dem Vorhergehenden:

1. Zu jedem Punkte gehört eine ihn enthaltende Nullebene und zu jeder Ebene ein in ihr liegender Nullpunkt.
2. Ist von einer Ebene und einem in ihr liegenden Punkte erstere die Nullebene des letztern, so ist auch letzterer der Nullpunkt der erstern, und umgekehrt.
3. Liegt ein Punkt in einer Ebene, so geht die Nullebene des Punktes durch den Nullpunkt der Ebene; oder was dasselbe ist:

3*. Geht eine Ebene durch einen Punkt, so liegt der Nullpunkt der Ebene in der Nullebene des Punktes.

Aus 3. fliesst weiter: Liegen mehrere Punkte in einer Ebene, so gehen die Nullebenen der Punkte durch den Nullpunkt der Ebene; d. h.

4. Von mehreren in einer Ebene liegenden Punkten schneiden sich die Nullebenen in einem Punkte, welcher in ersterer Ebene liegt und ihr Nullpunkt ist.

Eben so folgt aus 3*.:

4*. Von mehrern sich in einem Punkte schneidenden Ebenen liegen die Nullpunkte in einer Ebene, welche erstern Punkt enthält und seine Nullebene ist.

Aus 4. schliessen wir ferner: Von mehrern in zwei Ebenen zugleich, d. i. in einer Geraden, liegenden

*) Ausführlicher habe ich diesen Gegenstand in einer Abhandlung „Ueber eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume“ in Crelle's Jornal X. Band, pag. 317. untersucht.

Punkten gehen die Nullebenen sowohl durch den Nullpunkt der einen, als durch den der andern jener zwei Ebenen, d. i. sie schneiden sich in der diese zwei Nullpunkte verbindenden Geraden; also:

5. Die Nullebenen mehrerer in einer Geraden liegenden Punkte schneiden sich wiederum in einer Geraden.

Aehnlicherweise ergiebt sich aus 4*.:

5*. Die Nullpunkte mehrerer sich in einer Geraden schneidenden Ebenen liegen wiederum in einer Geraden.

Nach 5. und 5*. entspricht also jeder Geraden eine zweite Gerade, so dass jeder Punkt der einen zu seiner Nullebene die durch ihn und durch die andere Gerade gelegte Ebene hat, und dass von jeder durch die eine Gerade gelegten Ebene der Nullpunkt derjenige ist, in welchem sie von der andern Geraden geschnitten wird. Je zwei solchergestalt sich entsprechende Gerade sind zugleich die Richtungen zweier Kräfte, auf welche sich das System reduciren lässt. Denn sind a und b die Nullebenen der Punkte A und B, und geht die eine der beiden Kräfte durch A oder B, so muss die andere resp. in a oder b liegen; geht folglich die eine durch A und B zugleich, so muss die andere den Durchschnitt von a mit b, d. i. die der AB entsprechende Gerade zur Richtung haben.

In dem besonderen Falle, wenn B in a liegt, geht nach 3. die Nullebene b von B durch den Nullpunkt A von a, d. i. a und b schneiden sich in AB selbst. Jede in einer Ebene a durch den Nullpunkt A derselben gezogene Gerade, oder, was dasselbe ist, jede durch einen Punkt A gelegte Gerade, welche zugleich in der Nullebene a des Punktes liegt, also jede Axe,

in Bezug auf welche das Moment des Systems null ist, hat folglich sich selbst zur entsprechenden, und es ist daher unmöglich, das System auf zwei Kräfte zu reduciren, von denen die eine eine solche Gerade zur Richtung hat.

Um diese Sätze durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir von den drei Coordinatenebenen, worauf das System der Kräfte in dem Vorigen bezogen worden, die Nullpunkte, und von dem Anfangspunkte der Coordinaten O die Nullebene zu bestimmen suchen.

Für eine in der Ebene der xy liegende Axe sind h und H null (§. 62.), folglich das Moment des Systems (§. 65.) in Bezug auf eine solche Axe

$$=rF(L-gC)+rG(M+fC).$$

Man sieht nun sogleich, dass, wenn man f und g durch die Gleichungen und $M+fC=0$ und $L-gC=0$ bestimmt, dieses Moment, unabhängig von F und G, also für jede in der Ebene der xy enthaltene Axe, welche durch den Punkt (f, g) geht, null wird. Dieser Punkt, d. i.

$$\left(-\frac{M}{C}, \frac{L}{C}, 0\right)$$

ist daher der Nullpunkt der Ebene der xy, und eben so finden sich

$$\left(0, -\frac{N}{A}, \frac{M}{A}\right) \text{ und } \left(\frac{N}{B}, 0, -\frac{L}{B}\right)$$

als die Nullpunkte der Ebenen der yz und zx.

Ferner ist für eine durch O gelegte Axe, wenn wir den Anfangspunkt (f, g, h) derselben mit O zusammen fallen lassen und daher $f, g, h=0$ setzen, das Moment

$$=rFG+rGM+rHN.$$

Da nun jetzt (F, G, H) der Endpunkt der Axe ist, so liegt derselbe, und mithin die von O ausgehende Axe selbst, wenn in Bezug auf sie das Moment null ist, in einer Ebene, deren Gleichung

$$Lx + My + Nz = 0,$$

welches also die Gleichung der Nullebene von O ist.

In dieser Ebene müssen nach 4* die Nullpunkte der in O sich schneidenden Coordinatenebenen liegen. Auch finden wir dieses durch unsere Rechnung bestätigt, wenn wir in der Gleichung für erstere Ebene die vorhin für die Nullpunkte erhaltenen Coordinaten substituiren.

§. 87.

Weitere Folgerungen ergeben sich, wenn wir Systeme von Ebenen betrachten, die entweder mit einer und derselben Geraden, oder mit einander parallel sind.

Drei oder mehrere sich in Parallelen schneidende Ebenen können als solche angesehen werden, die sich in einem unendlich entfernten Punkte schneiden, und wir schliessen daher nach 4*.:

6. Die Nullpunkte mehrerer sich in Parallelen schneidenden Ebenen liegen in einer mit den parallelen Durchschnittslinien ebenfalls parallelen Ebene, deren Nullpunkt unendlich entfernt nach der durch die Parallelen bestimmten Richtung zu liegt.

Da ferner parallele Ebenen als solche betrachtet werden können, die sich in einer unendlich entfernt liegenden Geraden schneiden, so müssen nach 5*.

7. die Nullpunkte mehrerer paralleler Ebenen in einer Geraden liegen.

Seyen a, a', a'',... mehrere unter sich parallele Ebenen, und eben so bilden b, b', b'',... ein zweites

System unter sich, aber nicht auch mit den erstern parallelen Ebenen. Von a, a',.. seyen A, A',.. und von b, b',.. seyen B, B',.. die Nullpunkte, so liegen nach 7. A, A',.. in einer Geraden α, und B, B',.. in einer zweiten Geraden β. Da ferner die Ebenen a, a',.. von den Ebenen b, b',.. in einander parallelen Geraden geschnitten werden, so liegen nach 6. sämmtliche Nullpunkte A, A',.. B, B',.., also auch die Geraden α und β, in einer Ebene. Zugleich aber können α und β keinen Punkt mit einander gemein haben. Denn fiele z. B. A mit B zusammen, so müssten auch die Nullebenen a und b dieser Punkte zusammenfallen, welches gegen die Voraussetzung ist. Mithin sind α und β mit einander parallel, und wir können den Satz aufstellen:

Hat man mehrere Systeme paralleler Ebenen, so sind die Geraden, welche sich in jedem Systeme durch die Nullpunkte der Ebenen legen lassen, insgesammt mit einander parallel.

Diese parallele Richtung der Geraden ist, wie man leicht sieht, dieselbe, welche wir im Obigen bei jedem Systeme von Kräften als einzig in ihrer Art fanden und uns vertical dachten. Wir wollen auch gegenwärtig diese Richtung vertical annehmen und hiernach den vorigen Satz so aussprechen:

8. Die Nullpunkte eines Systems paralleler Ebenen liegen in einer verticalen Linie.

Hieraus folgt leicht der umgekehrte Satz:

9. Von zwei Punkten A und B, die in einer Verticallinie liegen, sind die Nullebenen a und b parallel.

Denn wären sie es nicht, so lege man durch B eine Ebene b' parallel mit a. Der Nullpunkt von b' müsste dann derjenige seyn, in welchem b' von einer

durch A gelegten Verticale getroffen wird, folglich B selbst. Mithin hätte B zwei verschiedene Nullebenen, welches nicht möglich ist.

10. Jede verticale Ebene c hat einen unendlich entfernten Nullpunkt, und jeder unendlich entfernte Punkt C eine verticale Nullebene.

Denn seyen A und B zwei Punkte in c, welche in einer verticalen Linie liegen. Die Nullebenen a und b von A und B sind folglich (9.) einander parallel, und da nach 3. in a sowohl, als in b, der Nullpunkt von c liegt, so muss dieser unendlich entfernt seyn.

Um den zweiten Theil des Satzes zu beweisen, lege man durch C eine Ebene a, und eine mit a parallele Ebene b, die, weil C unendlich entfernt seyn soll, ebenfalls durch C gehend zu betrachten ist. Nach 3*. geht aber die Nullebene von C sowohl durch den Nullpunkt A von a, als durch den Nullpunkt B von b, also durch die Verticallinie AB (8.) und ist daher selbst vertical.

Da die Nullebenen zweier Punkte, die in einer Verticale liegen, einander parallel sind (9.), also sich erst in einer unendlich entfernten Geraden schneiden, so ist die einer Verticalen entsprechende Gerade unendlich entfernt. Von den zwei Kräften, worauf sich das System zurückführen lässt, kann daher keine eine verticale (mit der Hauptlinie parallele) Richtung haben, eben so wenig, als sie mit einer Axe, für welche das Moment des Systems null ist, zusammen fallen kann (vor. §.).

§. 88.

Zusätze. Sey $ABCD$ eine dreiseitige Pyramide, und von ihren Seitenflächen BCD, CDA, DAB,

ABC seyen die Nullpunkte resp. *F*, *G*, *H*, *I*, so ist *FGHI* eine in *ABCD* eingeschriebene Pyramide, zugleich aber auch eine um letztere umschriebene. Denn die Ebene durch die Nullpunkte *G*, *H*, *I* der sich in *A* schneidenden Ebenen *CDA*, *DAB*, *ABC* ist nach §. 86. 4*. die Nullebene von *A*, und auf gleiche Art sind *HIF*, *IFG*, *FGH* die Nullebenen von *B*, *C*, *D*. Die zwei Pyramiden stehen daher in einer solchen gegenseitigen Beziehung, dass die Ecken der einen die Nullpunkte der Flächen der andern, und die Flächen der einen die Nullebenen der Ecken der andern sind. Dabei entspricht jeder Kante der einen Pyramide eine Kante in der andern; z. B. der Kante *AB*, in welcher sich die Flächen *DAB* und *ABC* schneiden, die Kante *HI*, welche die Nullpunkte dieser Flächen verbindet*).

Dieselbe Betrachtung lässt sich auch auf jedes andere Polyeder anwenden. Sey *S* die Ecke eines Polyeders, *a*, *b*, *c*,... die in dieser Ecke in der Ordnung, wie sie an einander grenzen, (*a* an *b*, *b* an *c*, u. s. w.) zusammenstossenden Seitenflächen, und *A*, *B*, *C*,... die Nullpunkte dieser Flächen, die daher in einer Ebene, in der Nullebene von *S*, liegen. *ABC*... ist mithin ein ebenes Vieleck, und auf gleiche Art wird bei jeder andern Ecke durch die Nullpunkte der um die Ecke herumliegenden Flächen ein ebenes Vieleck bestimmt. Von allen Seiten aller dieser Vielecke gehört aber jede Seite, z. B. *AB*, zweien Vielecken zugleich an. Denn wenn die Kante des Polyeders, in welcher sich die Flächen *a* und *b* schneiden, und von welcher

*) Ueber die Construction zweier solchen Pyramiden siehe einen Aufsatz des Verf. in Crelle's Journal, III. Band, pag. 273. Vergl. auch Steiner Systemat. Entwickel. pag. 247.

S der eine Endpunkt ist, zum andern Endpunkte die Ecke T hat, so gehört die Seite AB des Winkels $ABC\ldots$ auch zu dem Vielecke, welches sich in der Nullebene von T aus den Nullpunkten der in T zusammenstossenden Flächen bildet. Alle diese Vielecke hängen daher als Seitenflächen eines zweiten Polyeders zusammen, welches in das erstere zugleich um- und eingeschrieben ist; eingeschrieben, weil seine Ecken A, B,... die Nullpunkte der Flächen a, b,... des erstern sind, — umschrieben, weil seine Flächen $ABC\ldots$, u. s. w. die Ecken S, u. s. w. des erstern zu Nullpunkten haben. Jedes von ihnen hat daher eben so viel Ecken und Flächen, als das andere resp. Flächen und Ecken hat; nach dem bekannten Euler'schen Satze, dass die Kantenzahl der um zwei Einheiten verminderten Summe der Ecken- und Flächenzahlen gleich ist, haben folglich beide Polyeder gleich viel Kanten, was auch schon daraus fliesst, dass jeder Kante des einen eine Kante des andern entspricht, z. B. der Kante des ersten, in welcher sich die Flächen a und b schneiden, die Kante AB des zweiten.

Seyen, um diese Betrachtungen noch durch ein Beispiel deutlicher zu machen, a und a', b und b', c und c' die sechs sich zu zweien gegenüberliegenden Vierecke eines Hexaëders, in weiterem Sinne genommen, so sind die Nullpunkte A, A', B, B', C, C' dieser Flächen die Ecken eines in und um das Hexaëder beschriebenen Oktaëders, welche sich eben so paarweise, A und A', u. s. w. gegenüberstehen. So wie das Hexaëder 6 Flächen und 8 Ecken hat, kommen dem Oktaëder 8 Flächen und 6 Ecken zu. Die Zahl der Kanten ist aber bei jedem der beiden Körper $= 12$.

Ist das Hexaëder ein Parallelepipedum, und daher

a' mit a, b' mit b, c' mit c parallel, so sind die drei Diagonalen AA', BB', CC' des Oktaëders einander parallel (§. 87. 8.); die Ebene $AA'BB'$ ist parallel mit den vier Kanten des Parallelepipedums, in denen sich die Flächen a, a', b, b' schneiden; u. s. w. (§. 87. 6.). Allerdings macht es einige Schwierigkeit, sich ein Oktaëder, dessen Diagonalen einander parallel sind, vorzustellen. Es gehört zu den bis jetzt noch nicht betrachteten Polyedern, deren Flächen sich innerhalb der sie begrenzenden Kanten schneiden, zu Polyedern, welche den in §. 45. 3. gedachten Vielecken analog sind, deren Perimeter, bevor sie in sich zurückkehren, sich gleichfalls ein- oder mehrere Male begegnen.

Relationen zwischen Momenten, deren Axen beliebige Richtungen haben.

§. 89.

Die Momente eines Systems in Bezug auf mehrere sich in einem Punkte M schneidende Axen sind, wie wir in §. 76. gesehen haben, den Theilen der Axen proportional, welche in letztern von einer gewissen durch M zu beschreibenden Kugelfläche abgeschnitten werden. Sind daher von drei sich in einem Punkte M schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen MA, MB, MC die Momente α, β, γ gegeben, so lässt sich daraus das Moment δ für irgend eine vierte durch M gehende Axe MD durch folgende einfache Construction finden: Man nehme in den Axen MA, MB, MC die Abschnitte Ma, Mb, Mc proportional mit α, β, γ und beschreibe durch die vier Punkte M, a, b, c eine Kugelfläche. Schneidet nun diese die Axe MD in d, so wird Md dem gesuchten δ proportional seyn.

Eben so lässt sich aus den Momenten Ma, Mb

zweier sich schneidenden Axen MA, MB das Moment Md für jede dritte durch M gehende und mit erstern beiden in einer Ebene liegende Axe MD finden, indem man durch M, a, b einen Kreis beschreibt, welcher MD in d schneiden wird.

§. 90.

Schneiden sich die drei Axen, deren Momente gegeben sind, unter rechten Winkeln, so lässt sich die Aufgabe sehr einfach durch Rechnung lösen. — Sey unter allen durch M gehenden Axen MS die Axe des grössten Moments, und daher, wenn diese von der Kugelfläche in s geschnitten wird, Ms ein Durchmesser der Kugel. Alsdann ist $Ma = Ms . \cos SMA$, oder, wenn wir das grösste Moment $= \sigma$ setzen und uns eine zweite Kugel denken, die um M als Mittelpunkt mit der gemeinschaftlichen Länge der Axen, als Halbmesser, beschrieben ist, und auf deren Oberfläche daher die Punkte S, A, B, C, D liegen:

$$\alpha = \sigma \cos AS, \text{ und eben so}$$
$$\beta = \sigma \cos BS, \ \gamma = \sigma \cos CS, \ \delta = \sigma \cos DS.$$

Schneiden sich nun, wie angenommen worden, die drei Axen MA, MB, MC unter rechten Winkeln, und sind daher die Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks ABC insgesammt $= 90°$, so hat man:

$$\cos DS = \cos AD \cos AS + \cos BD \cos BS + \cos CD \cos CS.$$

Hierin für $\cos DS$, $\cos AS$, ... die ihnen nach vorigen Formeln proportionalen Werthe δ, α, ... substituirt, erhält man:

$$(A) \ldots \delta = \alpha \cos AD + \beta \cos BD + \gamma \cos CD.$$

Aus den Momenten für drei sich unter rechten Winkeln in einem Punkte schneidenden Axen findet

sich demnach das Moment für jede vierte durch denselben Punkt gehende Axe, wenn man erstere drei Momente resp. mit den Cosinussen der Winkel multiplicirt, welche von den Axen dieser Momente mit der Axe des vierten gebildet werden, und diese Producte addirt.

Uebrigens ist unter derselben Voraussetzung, dass $BC = CA = AB = 90°$:

$$\cos AS^2 + \cos BS^2 + \cos CS^2 = 1$$

und daher

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \sigma^2,$$

$$\cos AS = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \quad \cos BS = \text{u. s. w.}$$

Formeln, mittelst deren man aus den Momenten für drei sich rechtwinklig in einem Punkte schneidende Axen, von der durch denselben Punkt gehenden Axe, welche das grösste Moment hat, dieses Moment selbst und die Lage der Axe finden kann.

§. 91.

Die im vorigen §. erhaltene Relation zwischen vier Momenten, von deren vier Axen sich drei unter rechten Winkeln treffen, ist zuerst von Euler gegeben worden*). Es ist aber nicht schwer, eine eben so einfache Formel für den allgemeinern Fall herzuleiten, wenn die vier Axen willkührliche Winkel mit einander machen.

1) Von einer durch die Gerade PQ vorgestellten Kraft ist das Moment in Bezug auf die Axe A_1B_1 die Pyramide A_1B_1PQ (§. 59. Zus.). Seyen nun A und B zwei beliebige andere Punkte in A_1B_1, so verhalten

---

*) Nova Acta Petrop. Tom. VII. vom Jahre 1793.

sich die Pyramiden $A_1 B_1 PQ : ABPQ$ wie die Dreiecke $A_1 B_1 P : ABP$, und diese wie die Geraden $A_1 B_1 : AB$; und es ist daher, wenn wir die Axenlänge $A_1 B_1$ zur Einheit des Maasses nehmen:

$$ABPQ = AB . A_1 B_1 PQ,$$

wo die Linie AB positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem sie mit der in sie fallenden Axe $A_1 B_1$ einerlei oder entgegengesetzte Richtung hat.

2) Auf gleiche Art ist, wenn wir noch andere Kräfte $P'Q'$, $P''Q''$,... auf die Axe $A_1 B_1$ beziehen:

$$ABP'Q' = AB . A_1 B_1 P'Q',$$

u. s. w. Addiren wir alle diese Gleichungen, so kommt mit Anwendung des Summationszeichens Σ, und wenn wir das Moment des von den Kräften PQ, $P'Q'$,... gebildeten Systems in Bezug auf eine Axe, welche in der Geraden AB liegt, aber nicht AB selbst, sondern die Linieneinheit ($= A_1 B_1$) zur Länge hat, mit $[AB]$ bezeichnen:

$$\Sigma ABPQ = AB \Sigma A_1 B_1 PQ = AB [AB].$$

3) Seyen MA_1, MB_1, MC_1, MD_1 vier sich in einem Punkte M schneidende Axen, von denen die drei ersten wenigstens nicht in einer Ebene liegen. Man nehme in MD_1 beliebig einen Punkt D und construire um MD als Diagonale ein Parallelepipedum, dessen in M zusammenstossende Kanten in die Axen MA_1, MB_1, MC_1 fallen. Seyen resp. A, B, C die andern Endpunkte dieser Kanten, so ist, wenn PQ wiederum eine Kraft bezeichnet:

$$MDPQ = MAPQ + MBPQ + MCPQ \text{ (§. 63. 3.)}$$

folglich auch bei einem Systeme von mehreren Kräften PQ, $P'Q'$, u. s. w.:

$$\Sigma MDPQ = \Sigma MAPQ + \Sigma MBPQ + \Sigma MCPQ$$

folglich nach nr. 2.:

$$(B) \ldots MD[MD] = MA[MA] + MB[MB] + MC[MC].$$

Wenn demnach für die drei Axen MA_1, MB_1, MC_1 die Momente $[MA]$, $[MB]$, $[MC]$ gegeben sind, und das Moment $[MD]$ für die Axe MD_1 gesucht wird, so construire man das Parallelepipedum $MABCD$, als wodurch sich die Verhältnisse zwischen $MA, \ldots MD$ ergeben, und man erhält damit nach letzterer Gleichung folgenden das Gesuchte.

§. 92.

Zusätze. *a.* Macht man in den Axen $MA_1, \ldots MD_1$ die Linien $Ma, \ldots Md$ den Momenten der Axen resp. proportional, so liegen a, b, c, d mit M in der Oberfläche einer Kugel (§. 76.), und man bekommt damit den geometrischen Satz:

Hat man eine Kugel und ein Parallelepipedum, dessen eine Ecke M in der Fläche der erstern liegt, und sind a, b, c, d die Punkte, in denen die Kugelfläche resp. von den in M zusammenstossenden Kanten MA, MB, MC und der Diagonale MD des Parallelepipedums geschnitten wird, so ist:

$$MD \,.\, Md = MA \,.\, Ma + MB \,.\, Mb + MC \,.\, Mc.$$

b. Schneiden sich die drei Axen MA_1, MB_1, MC_1 unter rechten Winkeln, so verhalten sich

$$MA : MB : MC : MD$$
$$= \cos A_1 MD_1 : \cos B_1 MD_1 : \cos C_1 MD_1 : 1$$

und man kommt durch Substitution dieser Verhältnisswerthe in die allgemeine Gleichung (B) auf die specielle Gleichung (A) in §. 90. wieder zurück.

§. 93.

So sehr auch die Gleichung (B) die Eulersche (A) an Allgemeinheit übertrifft, so ist sie doch nur als ein specieller Fall einer weit allgemeinern Relation anzusehen, die sich auf ganz ähnliche Art wie (B) entwickeln lässt.

Man habe, wie vorhin, ein beliebiges System von Kräften PQ, $P'Q'$, $P''Q''$,..., welches S heisse. Seyen ferner AA', BB', CC',... die Kräfte eines zweiten Systems T, welche einander das Gleichgewicht halten. Alsdann ist wegen dieses Gleichgewichts von T, wenn man T nach und nach auf alle Kräfte PQ, $P'Q'$,... des Systems S, als auf Axen, bezieht (§. 58.):

$$AA'PQ + BB'PQ + CC'PQ + \ldots = 0$$
$$AA'P'Q' + BB'P'Q' + CC'P'Q' + \ldots = 0$$

u. s. w.; und wenn man alle diese Gleichungen summirt:

$$\Sigma AA'PQ + \Sigma BB'PQ + \Sigma CC'PQ + \ldots = 0;$$

folglich nach §. 91. 2.:

$$AA'[AA'] + BB'[BB'] + CC'[CC'] + \ldots = 0,$$

wo $[AA']$, $[BB']$,... die Momente des Systems S für Axen bezeichnen, welche an Länge einander gleich sind und resp. in den Geraden AA', BB',... liegen, und wo man, wie schon erinnert, die Coefficienten AA', BB',.. dieser Momente positiv oder negativ zu nehmen hat, je nachdem die Richtungen dieser Linien mit denen der in sie fallenden Axen übereinstimmen, oder nicht.

Bezieht man demnach ein System S von Kräften auf mehrere (einander gleiche) Axen, und kann man nach der Richtung einer jeden dieser Axen eine Kraft wirken lassen von der Grösse, dass alle diese

neuen Kräfte einander das Gleichgewicht halten, so ist die Summe der Momente von S, jedes Moment vorher mit einem Coefficienten multiplicirt, welcher der, der Axe des Moments zugehörigen, Kraft proportional ist, $= 0$.

Auf gleiche Art findet sich, wenn AA' die Resultante von BB', CC', ... ist:

$$AA'[AA'] = BB'[BB'] + CC'[CC'] + \ldots$$

Auch fliesst dieses schon aus der vorhergehenden Formel. Denn alsdann sind $A'A$, BB', ... mit einander im Gleichgewichte und daher

$$A'A[A'A] + BB'[BB'] + \ldots = 0.$$

Es ist aber $A'A = -AA'$ und $[A'A] = [AA']$, indem der eine Ausdruck, so gut wie der andere, das Moment des Systems S in Bezug auf eine Axe vorstellt, welche in der durch die zwei Punkte A und A' gezogenen Geraden enthalten ist; folglich u. s. w.

§. 94.

Beispiele. 1) Hat man vier sich in einem Punkte schneidende Axen, so kann man immer ein Parallelepipedum construiren, von welchem drei in dem Punkte zusammenstossende Kanten und die durch denselben Punkt gehende Diagonale in die vier Axen zu liegen kommen. Von vier Kräften aber, welche ihrer Grösse und Richtung nach durch diese drei Kanten und die Diagonale vorgestellt werden, ist die Kraft in der Diagonale die Resultante der drei andern. Hiermit das vorige Theorem in Verbindung gebracht, kommen wir auf den Satz in §. 91. zurück, der daher von dem vorigen nur ein besonderer Fall ist.

2) Ist $ABCD$ ein Parallelogramm, so sind die

Kräfte AB und AD mit den Kräften BC und DC gleichwirkend, und daher:

$$AB[AB]+AD[AD]=BC[BC]+DC[DC].$$

3) Construirt man zu einem ebenen Vierecke $ABCD$ (Fig. 13.) ein zweites $abcd$, dessen Seiten ab, bc,... mit den gleichnamigen AB, BC,... des erstern, und dessen Diagonalen ac, bd mit den ungleichnamigen BD, AC des erstern parallel sind, so sind vier Kräfte, welche in den vier Seiten der einen Vierecks wirken, und deren Intensitäten sich wie die entsprechenden Seiten des andern verhalten, im Gleichgewichte (§. 29.); folglich:

$$ab[AB]+bc[BC]+cd[CD]+da[DA]=0, \text{ so wie}$$
$$AB[ab]+BC[bc]+CD[cd]+DA[da]=0,$$

zwei Gleichungen, deren jede die Relation zwischen den Momenten für irgend vier in einer Ebene gelegene Axen darstellt.

§. 95.

Folgerungen. *a.* Ist in dem zweiten Beispiele des vorigen §. D der Nullpunkt der Ebene des Parallelogramms $ABCD$, so ist $[AD]=0$, $[DC]=0$, und die Formel wird:

$$AB[AB]=BC[BC];$$

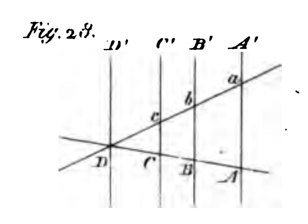
folglich verhalten sich die Momente $[AB]$ und $[BC]$, wie BC und AB, d. i. wie die Abstände der Linien AB und BC von D; also:

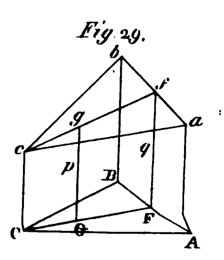
Von je zwei in einer Ebene liegenden Axen sind die Momente den Abständen der Axen vom Nullpunkte der Ebene proportional, so dass, wenn man um den Nullpunkt, als Mittelpunkt, Kreise in der Ebene

beschreibt, alle Axen, welche einen und denselben Kreis berühren, gleiche Momente haben, und dass für Axen, welche Tangenten verschiedener Kreise sind, die Momente sich wie die Halbmesser der Kreise verhalten.

b. Sind daher AA', BB' (Fig. 28.) zwei parallele Axen, und trägt man auf sie Längen Aa, Bb, welche den Momenten für diese Axen proportional sind, so muss in der Geraden DD', welche durch den Schneidepunkt D der Geraden AB und ab parallel mit den Axen gezogen wird, der Nullpunkt der Ebene der Axen liegen. Denn die Abstände der AA' und BB' von irgend einem Punkte dieser, und nur dieser, Geraden DD' verhalten sich wie Aa und Bb. In Bezug auf DD', als Axe, ist daher das Moment null, und für je zwei mit DD' parallele und in einer Ebene gelegene Axen sind die Momente den Abständen der Axen von DD' proportional. Für eine dritte mit AA' und BB' parallele und mit ihnen in derselben Ebene liegende Axe CC', die von AB in C und von ab in c geschnitten wird, ist folglich das Moment proportional mit Cc.

c. Auf ähnliche Art, wie hiernach aus den Momenten für zwei parallele Axen das Moment für jede dritte mit ihnen parallele und in derselben Ebene enthaltene Axe gefunden werden kann, lässt sich auch aus den Momenten Aa, Bb, Cc (Fig. 29.) für drei parallele und nicht in einer Ebene liegende Axen das Moment für jede vierte mit ihnen parallele Axe p überhaupt bestimmen. — Eine durch Aa und Bb gelegte Ebene und eine durch Cc und p gelegte mögen sich in der Geraden q schneiden, die mit den vier Axen $Aa, \ldots p$ parallel seyn wird. Sind daher F und f die Durchschnitte von q mit AB und ab, so ist Ff das Moment





für q, und eben so, wenn p von CF und cf resp. in G und g getroffen wird, Gg das Moment für p. Es liegt aber G mit A, B, C, und g mit a, b, c in einer Ebene, welches folgende noch kürzere Regel giebt: Man lege durch A, B, C eine Ebene und eine zweite durch a, b, c, und wenn diese Ebenen die vierte Axe p resp. in G und g schneiden, so ist Gg das für p gesuchte Moment.

Sind daher von drei parallelen aber nicht in einer Ebene liegenden Axen die Momente einander gleich, so ist auch das Moment jeder vierten mit ihnen parallelen Axe von derselben Grösse, indem dann jene zwei Ebenen eine parallele Lage haben. Sind aber die drei Momente ungleich, so schneiden sich die zwei Ebenen, und wenn man durch ihre Durchschnittslinie eine Ebene α parallel mit den Axen Aa,... legt, so ist von jeder mit Aa,... parallelen Axe das Moment dem Abstande der Axe von α proportional. Alle Axen, die parallel mit Aa,... und in einer und derselben mit α parallelen Ebene enthalten sind, haben daher einander gleiche Momente. Jede in α selbst fallende und mit Aa,... parallele Axe hat ein Moment $=0$. Der Nullpunkt der Ebene α ist daher unendlich entfernt und liegt nach der durch die Parallelen Aa,... bestimmten Richtung. Die Ebene α ist folglich mit der Hauptlinie des Systems parallel (§. 87. 10.).

§. 96.

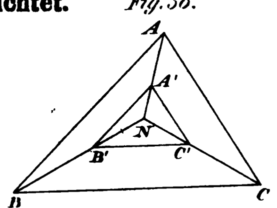
Zusatz. Aus dem Satze des vorigen §., dass die Momente für Axen, die in einer Ebene liegen, sich wie die Abstände der Axen vom Nullpunkte der Ebene verhalten, fliesst eine leichte Methode, um aus den Momenten dreier Axen in einer Ebene, die nicht

alle drei mit einander parallel sind, oder sich in einem Punkte schneiden, den Nullpunkt der Ebene und damit das Moment für jede vierte Axe der Ebene zu finden. Sey ABC (Fig. 30.) das von den Richtungen der drei Axen gebildete Dreieck, (von welchem die eine Ecke auch unendlich entfernt seyn kann,) und die Momente dieser nach BC, CA, AB gerichteten Axen seyen f, g, h. Man construire ein zweites Dreieck $A'B'C'$, dessen Seiten $B'C'$,... mit den gleichnamigen BC,... des erstern parallel laufen und von BC,... sich in Abständen befinden, die den Momenten f, g, h proportional sind. Da hiernach die Abstände des Punktes A' von CA und AB sich wie g zu h verhalten, und in demselben Verhältnisse die Abstände jedes andern Punktes der Linie AA', und nur dieser, von CA und AB sind, so muss jenem Satze zufolge der Nullpunkt der Ebene in AA', und aus ähnlichem Grunde auch in BB' und CC', liegen. Die drei Geraden AA', BB', CC' schneiden sich daher in einem Punkte N, im Nullpunkte der Ebene, und das Moment für jede vierte Axe der Ebene verhält sich z. B. zu f, wie der Abstand der vierten Axe von N zum Abstande der Axe BC von N.

Beiläufig folgt hieraus der auch sonst schon bekannte geometrische Satz, dass bei zwei ähnlichen und ähnlich liegenden Dreiecken die drei Geraden, welche die sich entsprechenden Ecken verbinden, sich in einem Punkte schneiden.

— Die Aufgabe, aus den Momenten dreier in einer Ebene liegenden Axen das Moment für irgend eine vierte Axe der Ebene zu finden, kann auch mittelst einer der beiden Formeln in §. 94. 3. gelöst werden, wie von selbst einleuchtet.

Fig. 30.



Noch eine Lösung der Aufgabe geht aus der in §. 89. zu Ende bemerkten Construction hervor. Liegen nämlich die Axen, deren Momente gegeben sind, in den Seiten des Dreiecks ABC, und ist D ein beliebiger Punkt der vierten Axe, so erhält man mittelst jener Construction aus den Momenten der Axen in AB und AC das Moment der Axe in AD, aus den Momenten der Axen in AC und BC das Moment der Axe in CD, und aus den Momenten der Axen in AD und CD das Moment der vierten Axe selbst. — Hiermit ergeben sich zugleich einige geometrische Sätze, bei deren Entwickelung ich mich aber nicht aufhalten will.

§. 97.

Die im Vorhergehenden erhaltenen Relationen zwischen den Momenten eines Systems in Bezug auf mehrere Axen fanden nur dann statt, wenn Kräfte bestimmt werden konnten, welche, nach den Axen wirkend, einander das Gleichgewicht hielten. Die Relationen selbst waren von linearer Form, und jene Kräfte traten darin als Coefficienten der Momente auf. Es entsteht nun die Frage, ob nicht auch dann, wenn ein solches Gleichgewicht nicht möglich ist, Relationen, wenn auch von anderer, als linearer Form, zwischen den Momenten sich angeben lassen.

Um dieses zu untersuchen, wollen wir mehrere Axen in solcher Anzahl $= n$, und in solcher Lage gegen einander voraussetzen, dass zwischen den auf sie bezogenen Momenten irgend eines Systems von Kräften stets eine Gleichung, und nur eine, statt findet. Für ein System S seyen diese n Momente $= M, M', M'', \ldots$; für ein beliebiges andere S' seyen sie $= M + N$, $M' + N'$, $M'' + N''$, ... Nach der Natur der Momente

werden alsdann für ein drittes System, welches aus den Kräften von S' und den direct entgegengesetzten von S besteht, die Momente in Bezug auf dieselben n Axen, $= N, N', N'', \ldots$ seyn. Besteht daher die gesuchte Gleichung das einemal zwischen $M, M', \ldots$ und das andremal zwischen $M+N, M'+N', \ldots$, so muss sie auch bestehen zwischen $N, N', \ldots$, d. i. wenn man für $M, M', \ldots$ die Incremente setzt, welche diese Grössen der Gleichung zufolge haben können. Wie die Analysis lehrt, ist dieses aber nur dann möglich, wenn die Gleichung von der linearen Form $pM+p'M'+p''M'' + \ldots = 0$ ist, wo $p, p', p'', \ldots$ Zahlen vorstellen, die von einem Systeme S zum andern in constanten Verhältnissen zu einander stehen*).

Um diese constanten Verhältnisse zu bestimmen, setze man, das System S bestehe aus einer einzigen

---

*) In der That, sind z. B. drei Veränderliche x, y, z durch eine Gleichung $z = f(x, y)$ mit einander verbunden, so ist die allgemeine Gleichung zwischen ihren Incrementen Δx, Δy, Δz:

$$\Delta z = p\,\Delta x + q\,\Delta y + \tfrac{1}{2} r\,\Delta x^2 + s\,\Delta x\,\Delta y + \tfrac{1}{2} t\,\Delta y^2 + \ldots$$

wo $p, q, r, s, t, \ldots$ die aus der Gleichung $z = f(x, y)$ zu bestimmenden Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dx},\ \frac{dz}{dy},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dx\,dy},\ \frac{d^2z}{dy^2},\ \ldots$$

bezeichnen. Soll nun zwischen den Incrementen dieselbe Gleichung, wie zwischen x, y, z, statt finden, soll also Δz bloss von Δx und Δy, nicht aber von x und y abhängen, so müssen auch in jener allgemeinen Gleichung der Incremente die Coefficienten $p, q, r, s, t, \ldots$ unabhängig von x und y, folglich constant seyn. Sind aber p und q constant, so sind alle folgenden $r, s, t, \ldots$ null. Hiernach ist die Gleichung zwischen den Incrementen:

$$\Delta z = p\,\Delta x + q\,\Delta y,$$

und damit die Gleichung zwischen x, y, z selbst:

$$z = px + qy,$$

wo p und q constant sind.

Kraft. Alsdann sind M, M',... die (sechsfachen) Pyramiden, welche diese eine Kraft S zur gemeinschaftlichen Kante und die der Längeneinheit gleichen n Axen zu gegenüberstehenden Kanten haben. Die Producte pM, $p'M'$,... sind folglich Pyramiden, die man erhält, wenn man in den vorigen die mit den Axen zusammenfallenden Kanten resp. $=p$, p',..., statt $=1$, nimmt; folglich auch die Momente von Kräften p, p',..., welche in den n Axen wirken, in Bezug auf eine in der Richtung von S liegende Axe. Da nun die Summe dieser Momente für jede Lage von S null seyn soll, so müssen die Kräfte p, p',... einander das Gleichgewicht halten.

Sind demnach mehrere Axen in solcher Anzahl $=n$ *und in solcher Lage gegen einander vorhanden, dass die Momente* $M, M', \ldots M^{(n-2)}$ *für* $n-1$ *derselben nach der Beschaffenheit des Systems, welches auf sie bezogen wird, alle möglichen Werthe haben können, das Moment* $M^{(n-1)}$ *für die nte Axe aber durch jene* $n-1$ *Momente bestimmt wird, so ist die deshalb zwischen den n Momenten statt findende Gleichung von der linearen Form:*

$$pM+p'M'+\ldots+p^{(n-1)}M^{(n-1)}=0,$$

und Kräfte, welche die Richtungen der n Axen haben und sich wie die Coefficienten $p, p', \ldots p^{(n-1)}$ *verhalten, sind mit einander im Gleichgewichte.*

Sind folglich — so können wir hieraus noch schliessen, — die Momente für irgend $n-1$ Axen von einander unabhängig, und lassen sich für die $n-1$ Axen und eine $n$te keine Kräfte angeben, welche, nach ihnen wirkend, einander das Gleichgewicht halten, so ist auch

das Moment für die $n$te Axe von den Momenten für die $n-1$ erstern unabhängig.

Dieselbe Folgerung gilt aber auch dann noch, wenn die Momente für die $n-1$ erstern Axen, oder für einige derselben, von einander abhängig sind, so dass zwischen ihnen eine oder auch etliche Gleichungen (α) statt finden. Denn gäbe es eine Gleichung (β) zwischen dem $n$ten Momente und den übrigen, so könnte man aus (β) mittelst der Gleichungen (α) so viel der $n-1$ erstern Momente eliminiren, dass in (β) ausser dem $n$ten Momente nur solche zurückblieben, welche von einander unabhängig wären, und es müssten dann Kräfte, nach den Axen dieser Momente wirkend, mit der Kraft in der $n$ten Axe im Gleichgewichte seyn können, welches gegen die Voraussetzung streitet; überhaupt also:

Je nachdem sich für die Richtungen gegebener Axen Kräfte, die im Gleichgewichte mit einander sind, angeben lassen, oder nicht, findet auch zwischen den Momenten eines Systems in Bezug auf diese Axen Abhängigkeit, oder keine, statt.

§. 98.

Nach den Ergebnisssen des vorigen §. ist die Untersuchung über die gegenseitige Abhängigkeit zwischen den Momenten eines Systems in Bezug auf gegebene Axen in jedem Falle auf die Beantwortung der Frage zurückgebracht: Welches muss die gegenseitige Lage einer gegebenen Anzahl gerader Linien seyn, wenn Kräfte sollen gefunden werden können, welche, nach diesen Linien wirkend, einander das Gleichgewicht halten?

Wir gehen, um diese schon an sich nicht unin-

teressante Frage zu beantworten, von den sechs allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts aus:

$$(a) \begin{cases} A=0, \; B=0, \; C=0, \\ L=0, \; M=0, \; N=0, \end{cases} \quad (\S.\ 66.)$$

wo, wenn P, P',... die Kräfte des Systems und φ, χ, ψ; φ', χ', ψ';... die Winkel bezeichnen, welche die Richtungen von P; P';... mit den drei Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems machen, und wenn (x, y, z), (x', y', z'),... beliebige in den Richtungen von P, P',... genommene Punkte sind:

$$A = \Sigma P \cos\varphi, \; B = \Sigma P \cos\chi, \; C = \Sigma P \cos\psi$$
$$L = \Sigma P(y \cos\psi - z\cos\chi), \; M = \Sigma P(z\cos\varphi - x\cos\psi),$$
$$N = \Sigma P(x\cos\chi - y\cos\varphi).$$

Aus dem Früheren wissen wir, dass zwischen zwei Kräften nur dann Gleichgewicht herrschen kann, wenn ihre Richtungen in eine und dieselbe Gerade fallen (§. 4. I.), und zwischen drei Kräften nur dann, wenn ihre Richtungen in einer und derselben Ebene liegen (vergl. §. 85. 1.) und sich darin entweder in einem Punkte schneiden oder einander parallel sind. Dasselbe muss sich auch aus den Gleichungen (a) folgern lassen. Doch wollen wir uns bei den hierzu nöthigen Rechnungen nicht aufhalten, sondern sogleich zu dem Falle übergehen, wenn

1) das System aus 4 Kräften besteht. Eliminirt man diese 4 Kräfte aus den Gleichungen (a), so bleiben, weil in (a) nur die gegenseitigen Verhältnisse der Kräfte vorkommen, 3 Gleichungen, sie mögen (b) heissen, — zwischen den die Richtungen der vier Kräfte bestimmenden Grössen $x, y, z, \varphi, \chi, \psi, x', \ldots \psi'''$ zurück. Diese Gleichungen (b) geben daher für die gegenseitige Lage der 4 Richtungen die Bedingungen an, unter

denen es möglich ist, dass 4 nach diesen Richtungen wirkende Kräfte sich das Gleichgewicht halten können.

Nun wird die Lage einer geraden Linie im Raume im Allgemeinen durch 4 Constanten bestimmt, z. B. die Richtung der Kraft P durch die zwei Coordinaten x, y ihres Durchschnitts mit der Ebene der x, y, und durch die zwei Winkel φ und χ, welche P mit den Axen der x und y macht. Die Lage einer Geraden ist daher als bestimmt anzusehen, wenn zwischen diesen 4 Constanten 4 Gleichungen gegeben sind. Zu einer solchen Gleichung führt unter andern die Bedingung, dass die Gerade eine andere gegebene Linie schneiden soll; zu zwei solchen Gleichungen die Bedingung, dass die Gerade durch einen gegebenen Punkt gehen, oder in einer gegebenen Ebene liegen soll.

Bezeichnen wir daher die Richtungen der vier Kräfte mit a, b, c, d und nehmen a, b, c als willkührlich gegeben an, so haben wir für die Bestimmung der 4 Constanten von d die 3 Gleichungen (b), und wir können daher nach Willkühr noch eine 4te Gleichung hinzusetzen, welche z. B. die Bedingung ausdrückt, dass d eine gegebene Gerade l schneiden soll. Dies führt zu der bestimmten Aufgabe:

I. *Zu drei gegebenen Richtungen a, b, c eine vierte d zu finden, welche eine noch andere gegebene Gerade l schneidet, dergestalt, dass sich vier Kräfte angeben lassen, welche, nach diesen vier Richtungen wirkend, im Gleichgewichte sind.*

2) Bestehe das System aus 5 Kräften. Nach Elimination derselben aus den 6 Gleichungen (a) erhält man zwei Bedingungsgleichungen (b) zwischen ihren Richtungen. Lässt man daher 4 dieser Richtungen gegeben seyn, so muss die 5te den 2 Gleichungen (b)

Genüge leisten, und man kann daher zur vollständigen Bestimmung der 4 Constanten der 5ten Richtung noch zwei beliebige andere Gleichungen zwischen diesen Constanten hinzufügen, wodurch z. B. die Bedingung ausgedrückt wird, dass die 5te Richtung durch einen gegebenen Punkt M gehen, oder in einer gegebenen Ebene μ liegen soll. Hieraus fliesst die bestimmte Aufgabe:

II. *Zu vier gegebenen Richtungen a, b, c, d eine fünfte e zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt M geht, oder in einer gegebenen Ebene C^2 enthalten ist, dergestalt, dass sich nach diesen fünf Richtungen wirkende Kräfte angeben lassen, welche sich das Gleichgewicht halten.*

3) Hat man ein System von 6 Kräften, so geht nach Elimination derselben aus (a) eine einzige Gleichung (b) zwischen den Richtungen hervor. Hier können also 5 Richtungen beliebig gegeben seyn und für die 6te 3 Bedingungen nach Willkühr genommen werden, z. B. dass die 6te drei gegebene Gerade, oder einen gegebenen Punkt und eine gegebene Gerade treffen soll. Man hat daher die Aufgabe:

III. *Zu fünf gegebenen Richtungen a, b, c, d, e eine sechste f zu finden, welche in einer gegebenen Ebene μ liegt und darin einen gegebenen Punkt M trifft, dergestalt, dass sich nach diesen sechs Richtungen wirkende Kräfte u. s. w.*

4) Ist das System aus 7 Kräften zusammengesetzt, so lassen sich aus (a) je 5 derselben eliminiren, und man bekommt damit das Verhältniss je zweier Kräfte zu einander, ausgedrückt durch die Grössen, welche die Richtungen der 7 Kräfte bestimmen.

Sind daher sieben Richtungen gegeben, so ist es im Allgemeinen immer möglich, Kräfte zu finden,

welche, nach diesen Richtungen wirkend, einander das Gleichgewicht halten. Die Intensität einer dieser Kräfte kann nach Willkühr bestimmt werden.

Aehnlicherweise erhellet, dass im Allgemeinen für 8, 9, etc. gegebene Richtungen sich Kräfte im Gleichgewichte finden lassen, und dass von diesen Kräften resp. 2, 3, etc. ihrer Intensität nach willkührlich genommen werden können.

§. 99.

Zusätze. *a*. Von den drei im vorigen §. gestellten Aufgaben lässt sich die erste, ohne die allgemeinen Formeln (a) zu Hülfe zu nehmen, auch folgendergestalt durch Construction lösen. Zuerst sieht man leicht, dass jede Gerade x, welche die drei gegebenen Richtungen a, b, c, zugleich schneidet, auch die vierte d schneiden muss. Denn heissen P, Q, R, S die nach a, b, c, d gerichteten Kräfte, so sind in Bezug auf x, als Axe, die Momente von P, Q, R einzeln null (§. 60.), mithin muss wegen des Gleichgewichts zwischen P, Q, R, S auch das Moment von S für x null seyn; dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn x der d begegnet.

Halten sich daher vier Kräfte das Gleichgewicht, so trifft jede Gerade, welche die Richtungen dreier der vier Kräfte schneidet, auch die Richtung der vierten.

Es ist aber bekannt, dass, wenn eine Gerade x so fortbewegt wird, dass sie drei andere a, b, c fortwährend schneidet, jede Gerade d, welche drei verschiedenen Lagen h, i, k der x begegnet, auch jede vierte Lage der x trifft, dass folglich die durch die Bewegung der x erzeugte Fläche, — ein hyperbo-

lisches Hyperboloid, — auch entsteht, wenn d an h, i, k fortgeführt wird.

Man ziehe demnach drei Gerade h, i, k, deren jede die Richtungen a, b, c zugleich schneidet, und die Aufgabe ist darauf zurückgebracht: eine Gerade d so zu legen, dass sie die vier Geraden h, i, k, l zugleich trifft. Dieses ist aber im Allgemeinen entweder auf doppelte Weise, oder gar nicht möglich, je nachdem nämlich das durch die Bewegung von x oder d erzeugte Hyperboloid von der Geraden l entweder in zwei Punkten, oder gar nicht getroffen wird. Im erstern Falle führe man die Gerade d an h, i, k so weit fort, bis sie durch den einen oder andern Schneidepunkt geht, und sie wird dann die verlangte Lage haben. Im letzteren Falle aber ist die Lösung der Aufgabe unmöglich.

Nachdem somit die Richtung von d, wo möglich, bestimmt worden, hat es keine Schwierigkeit, die Verhältnisse zwischen den Kräften P, Q, R, S noch auszumitteln. Man lege die Kräfte parallel mit ihren bekannten Richtungen a, b, c, d an einen und denselben Punkt. Weil dadurch das Gleichgewicht, das zwischen ihnen bestehen soll, nicht gestört wird (§. 67. 2.), so muss jetzt die Resultante von P und Q, welche T heisse, der Resultante von R und S gleich und direct entgegengesetzt seyn. Die Richtung von T ergiebt sich hiermit als der Durchschnitt der Ebene, in welcher P und Q liegen, mit der Ebene, in welcher R und S sind. Nach §. 28. a. kennt man damit die Verhältnisse zwischen P, Q, T, so wie zwischen R, S, — T, folglich auch die Verhältnisse zwischen P, Q, R, S selbst.

b. Ohne bei der Lösung der zweiten und dritten Aufgabe zu verweilen, will ich über diese Aufgaben nur folgende Bemerkungen hinzufügen.

Da sich bei vier gegebenen Richtungen a, b, c, d zu jedem Punkte M eine durch ihn gehende fünfte, so wie zu jeder Ebene μ eine in ihr liegende fünfte Richtung finden lässt, so wird durch alle fünften Richtungen, die zu vier gegebenen gefunden werden können, der ganze Raum erfüllt, jedoch so, dass sich im Allgemeinen keine zwei derselben schneiden, oder, was dasselbe ist, keine zwei in einer Ebene liegen, indem es sonst für den Durchschnittspunkt M zwei durch ihn gehende fünfte Richtungen e und e_1 gäbe, und damit auch jede andere durch M gehende und in der Ebene von e und e_1 liegende Gerade f eine fünfte Riehtung seyn könnte. Sind nämlich P, Q, R, S, T Kräfte, die, nach a, b, c, d, e gerichtet, sich das Gleichgewicht halten, und sind die nach a, b, c, d, e_1 gerichteten Kräfte P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1 ebenfalls im Gleichgewichte, so würden auch die Kräfte $P+P_1$, $Q+Q_1$, $R+R_1$, $S+S_1$ mit der Resultante der nach e und e_1 gerichteten Kräfte T und T_1 im Gleichgewichte seyn. Weil es aber sowohl bei den erstern fünf Kräften $P,\ldots T$, als bei den fünf letztern $P_1\ldots T_1$, nur auf ihr gegenseitiges Verhältniss ankommt, so würde man das noch willkührliche Verhältniss von T zu T_1 so bestimmen können, dass die gedachte Resultante irgend eine durch M gehende und in der Ebene von e und e_1 liegende Richtung f hätte.

Haben die vier gegebenen Richtungen eine solche Lage, dass sich zwei Gerade m und n angeben lassen, von deren jeder jede der vier Richtungen geschnitten wird, so ist die einem Punkte M zugehörige fünfte Richtung e diejenige, welche durch M, die m und n zugleich schneidend, gelegt wird. Denn für m und n, als Axen, ist das Moment jeder der nach a, b, c, d wirkenden Kräfte null. Mithin muss auch das Moment

der nach e gerichteten Kraft in Bezug auf m sowohl, als auf n, null seyn.

c. Sind fünf Richtungen a, b, c, d, e gegeben, so sind alle daraus herzuleitenden sechsten Richtungen f, f_1, f_2, ..., welche durch einen und denselben Punkt M gehen, in einer Ebene enthalten. Denn gesetzt, es lägen f, f_1, f_2 nicht in einer Ebene. Da nun drei Kräfte, die nach drei sich in einem Punkte M schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Richtungen wirken, immer in solchen Verhältnissen zu einander genommen werden können, dass ihre durch M gehende Resultante irgend eine beliebige Richtung hat, so würde man nach ähnlichen Schlüssen, wie vorhin, von den fünf Richtungen $a, \ldots e$ zu allen durch M gehenden Richtungen überhaupt, also auch zu allen durch M gehenden und in der Ebene μ enthaltenen Richtungen, nicht bloss zu einer derselben, wie es die dritte Aufgabe fordert, gelangen können. Sind aber die sechsten Richtungen, welche den Punkt M treffen, in einer Ebene ν enthalten, so ist die in der Aufgabe geforderte Richtung der Durchschnitt der Ebenen μ und ν.

Auf ähnliche Weise zeigt sich, dass alle aus $a, \ldots e$ herzuleitenden sechsten Richtungen, welche in einer und derselben Ebene μ liegen, sich in einem Punkte N dieser Ebene schneiden müssen, und dass die in der Aufgabe verlangte Richtung die Gerade MN ist.

Bei einer solchen Lage der fünf Richtungen endlich, bei welcher sie sämmtlich von einer Geraden m geschnitten werden, wird jede aus ihnen herzuleitende Richtung von m, als von einer der Axen, für welche das Moment der sechs Kräfte null ist, gleichfalls getroffen. Die in diesem Falle gesuchte sechste Richtung

ist daher die von M nach dem Durchschnitte von μ und m gezogene Gerade.

§. 100.

Dieselben Bedingungen, die wir somit für die Richtungen von Kräften gefunden haben, wenn die Kräfte sich das Gleichgewicht sollen halten können, müssen nun auch für die Richtungen von Axen statt finden, wenn zwischen den Momenten irgend eines Systems in Bezug auf diese Axen eine Relation bestehen soll, oder, was dasselbe ist, wenn das Moment für eine dieser Axen aus den Momenten für die übrigen soll hergeleitet werden können. Es findet daher

1. *zwischen den Momenten eines Systems in Bezug auf zwei Axen nur dann eine Relation statt, wenn letztere in einer und derselben Geraden liegen. Die zwei Momente sind dann einander gleich und haben einerlei oder entgegengesetzte Zeichen, nachdem die Axen einerlei oder entgegengesetzte Richtungen haben.*

2. *Zwischen den Momenten in Bezug auf drei Axen, von denen keine zwei in dieselbe Gerade fallen, giebt es nur dann, und dann immer, eine Relation, wenn die drei Axen in einer Ebene liegen und sich darin entweder in einem Punkte schneiden* (§. 89.), *oder einander parallel sind* (§. 95. *b.*).

3. *Sind die Momente dreier Axen von einander unabhängig, so kann aus ihnen das Moment für jede vierte bestimmt werden, welche gegen die erstern drei eine solche Lage hat, dass jede Gerade, welche erstere drei schneidet, auch der vierten Axe begegnet.*

Von den Momenten dreier Axen, die in einer Ebene liegen, aber sich nicht in einem Punkte schneiden, ist daher das Moment jeder vierten Axe in der Ebene abhängig (§. 96.), und aus den Momenten dreier Axen, die sich in einem Punkte schneiden, aber nicht in einer Ebene liegen, kann das Moment für jede vierte den Punkt treffende Axe gefunden werden (§. 89. u. §. 91.). Wenn keine von drei Axen die andere schneidet, so ist von ihren Momenten das Moment jeder vierten abhängig, welche zu den drei erstern eine hyperboloidische Lage hat (§. 99. *a.*).

4. *Bei vier Axen, die rücksichtlich der auf sie bezogenen Momente von einander unabhängig sind, giebt es für jeden Punkt eine durch ihn gehende, und für jede Ebene eine in ihr liegende, Axe, deren Moment aus den Momenten der vier erstern bestimmt werden kann* (§. 99. *b.*).

Wird jede der vier Axen von denselben zwei Geraden getroffen, so sind von ihnen alle diejenigen, und keine anderen, abhängig, welche gleichfalls von diesen Geraden geschnitten werden.

5. *Bei fünf von einander unabhängigen Axen giebt es für jeden Punkt eine durch ihn gehende Ebene, und für jede Ebene einen in ihr liegenden Punkt dergestalt, dass aus den Momenten für erstere fünf Axen das Moment für jede durch den Punkt gehende und in der Ebene zugleich enthaltene Axe gefunden werden kann* (§. 99. *c.*).

Werden die fünf Axen von einer und derselben Geraden geschnitten, so sind von ihnen alle diejenigen, und keine anderen, abhängig, welche dieser Geraden ebenfalls begegnen.

6. *Aus den Momenten für sechs von einander unabhängige Axen kann das Moment für jede siebente gefunden werden* (§. 98. zu Ende).

§. 101.

Zusatz. Da die Gleichung zwischen den von einander abhängigen Momenten von linearer Form ist und darin kein von den Momenten freies Glied vorkömmt (§. 97.) so schliessen wir noch, dass wenn von den $n-1$ Momenten, woraus sich ein $n$tes bestimmen lässt, jedes $=0$ ist, auch das $n$te $=0$ seyn muss.

Sind also die Momente für 6 von einander unabhängige Axen einzeln $=0$, so ist es auch das Moment jeder 7ten, und es herrscht Gleichgewicht. Eben so, wie bei einem Systeme von Kräften in einer Ebene daraus, dass die Momente des Systems für 3 nicht in einer Geraden liegende Punkte der Ebene $=0$ waren, die Nullität des Moments für jeden andern Punkt der Ebene, und somit das Gleichgewicht des Systems, sich folgern liess (§. 33. A.*), kann also bei einem System im Raume auf die Nullität aller Momente und somit auf das Gleichgewicht geschlossen werden, wenn man weiss, dass für irgend 6 von einander unabhängige Axen die Momente einzeln $=0$ sind. — Dasselbe ergiebt sich auch aus dem allgemeinen Ausdrucke für das Moment eines Systems im Raume (§. 65.):

$$F(L-gC+hB)+G(M-hA+fC)+H(N-fB+gA).$$

Denn schon dadurch, dass man denselben für 6 verschiedene Axen, also für 6 verschiedene Systeme zusammengehöriger Werthe von f, g, h, F, G, H, null setzt, gelangt man zu den 6 Bedingungen des Gleichgewichts: $A=0, \ldots N=0$.

Wenn ferner in Bezug auf 5 von einander unabhängige Axen die Momente eines nicht im Gleichgewichte

befindlichen Systems einzeln $=0$ sind, so sind es auch die Momente aller andern, von erstern fünf abhängigen Axen, nicht aber das Moment einer Axe, welche von ihnen unabhängig ist, indem sonst nach dem Vorhergehenden das System im Gleichgewichte wäre, gegen die Voraussetzung. Aus 5 von einander unabhängigen Axen, deren Momente $=0$ sind, lassen sich daher alle übrigen Axen, die ein Moment $=0$ haben, finden. — Eben so, wie alle durch einen Punkt gehenden Axen, deren Momente null sind, in einer Ebene liegen (§. 84.), müssen daher auch alle in einem Punkte zusammentreffenden Axen überhaupt, deren Momente aus den Momenten für 5 von einander unabhängige Axen gefunden werden können, in einer Ebene enthalten seyn, u. s. w. (Vergl. vor. §.)

§. 102.

Die Bedingungen unter denen sich für 4, 5 oder 6 Richtungen Kräfte finden lassen, die mit einander im Gleichgewichte sind, so wie die Verhältnisse zwischen den sich das Gleichgewicht haltenden Kräften selbst, können ausser den im Obigen angezeigten Verfahrungsweisen, noch auf eine andere Art hergeleitet werden, die sich unmittelbar auf den das Gleichgewicht im Raume betreffenden Hauptsatz (§. 58.) gründet und wegen der Einfachheit, mit welcher sie die gesuchten Resultate liefert, eine nähere Anzeige verdient. Es wird hinreichen, wenn ich diese Methode an dem Falle erläutere, wenn das System nur aus vier Kräften besteht.

Seyen daher P, Q, R, S vier Kräfte, zwischen denen Gleichgewicht herrschen soll. Stellt man diese Kräfte durch Linien dar, bezeichnet durch x irgend eine andere Linie von bestimmter Länge, und

drückt durch Px u. s. w. die Pyramiden aus, welche P und x u. s. w. zu gegenüberliegenden Kanten haben, so ist jenem Hauptsatze zufolge:

$$(1) \ldots Px + Qx + Rx + Sx = 0,$$

welches auch die Lage und Länge von x seyn mag.

Man nehme nun in den Richtungen von P, Q, R, S Abschnitte a, b, c, d von beliebiger Länge, so ist (§. 91. 1) $Px = \frac{P}{a} . ax$, etc. wo ax die durch die Geraden a und x bestimmte Pyramide vorstellt, und es wird die vorige Gleichung, wenn man noch der Kürze willen

$$(2) \ldots \frac{P}{a} = p, \ \frac{Q}{b} = q, \ \frac{R}{c} = r, \ \frac{S}{d} = s$$

setzt: $(3) \ldots p.ax + q.\, bx + r.\, cx + s.\, dx = 0.$

Man lasse jetzt die noch unbestimmte Gerade x nach und nach mit a, b, c, d identisch werden, so erhält man, weil die Pyramiden aa, bb null sind, und $ab = ba$, u. s. w. ist (§. 72. zu Ende.):

$$(4) \begin{cases} q.\, ab + r.\, ac + s.\, ad = 0, \\ p.\, ab + r.\, bc + s.\, bd = 0, \\ p.\, ac + q.\, bc + s.\, cd = 0, \\ p.\, ad + q.\, bd + r.\, cd = 0, \end{cases}$$

vier Gleichungen, welche die gesuchten Bedingungen des Gleichgewichts enthalten müssen.

Eliminirt man r und s das einemal aus den drei letzten dieser Gleichungen und das anderemal aus der ersten, dritten und vierten, so kommt:

$$(5) \ldots p.\, (ab.\, cd - ac.\, bd - ad.\, bc) = 2q.\, bc.\, bd$$

$$(6) \ldots 2p.\, ac.\, ad = q\ (ab.\, cd - ac.\, bd - ad.\, bc)$$

und wenn hieraus noch das Verhältniss $p:q$ eliminirt wird:

$$(7) \ldots (ab.\, cd - ac.\, bd - ad.\, bc)^2 = 4\ ac.\, bd.\, ad.\, bc,$$

welches die Bedingungsgleichung für die gegenseitige Lage der vier Richtungen ist. Nach dem bereits in

§. 99. Gefundenen kann sie daher nichts anderes, als die hyperboloidische Lage dieser Richtungen ausdrücken. Auch lässt sich dies unter der Voraussetzung, dass es zwei Gerade t und t' giebt, deren jede jeder der vier Richtungen zugleich begegnet (ebendas.) folgendergestalt leicht darthun.

Schneide die eine dieser Geraden t die Richtungen, in denen die Abschnitte a, b, c, d liegen, resp. in A, B, C, D (Fig. 31.), und die andere Gerade t' resp. in A', B', C', D'. Man nehme ferner die noch unbestimmt gelassenen Abschnitte a, b, c, d resp. $=AA'$, BB', CC', DD'. Hiermit werden die Pyramiden $ab=AA'BB'=-ABA'B'$, $bc=-BCB'C'$, etc. Nach §. 59. Zus. ist aber das Sechsfache der Pyramide $ABA'B'$ $=AB.A'B'.u\sin\varphi$, wo u den kürzesten Abstand der beiden Geraden AB und $A'B'$, oder t und t', von einander, und φ den Winkel von t' mit t bezeichnet. Die Pyramiden ab, bc,... werden daher proportional den Produkten $AB.A'B'$, $BC.B'C'$,... Substituirt man diese Verhältnisswerthe in der Gleichung (7) und setzt noch zur Abkürzung:

$$AB.CD=f,\ AC.BD=g,\ AD.BC=h,$$
$$A'B'.C'D'=f',\ A'C'.B'D'=g',\ A'D'.B'C'=h,$$

so wird die Gleichung:

$$(ff'-gg'-hh')^2=4gg'hh'.$$

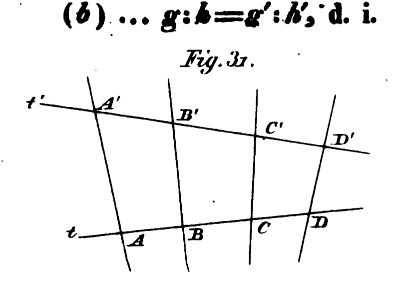
Weil aber A, B, C, D in einer Geraden liegen, so ist, wie man leicht findet:

$$(a)\ \begin{cases} f=g-h, \text{ und aus ähnlichem Grunde} \\ f'=g'-h'. \end{cases}$$

Hiermit reducirt sich die Gleichung auf: $(gh'-g'h)^2=0$, also:

$$(b)\ \ldots\ g:h=g':h',\ \text{d. i.}$$

Fig. 31.



$$(c)\quad \frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{A'C'}{B'C'}:\frac{A'D'}{B'D'},$$

d. h. das Verhältniss zwischen den Verhältnissen, nach welchen die Linie AB das einemal in C und das anderemal in D geschnitten wird, ist dem eben so durch die Punkte A', B', C', D' bestimmten Verhältnisse gleich. Wie bekannt, ist dies aber das charakteristische Merkmal, bei welchem ausser t und t' auch jede dritte Gerade, welche dreien der vier Geraden AA', BB', CC', DD' begegnet, zugleich die vierte trifft*).

Mittelst der Abschnitte $AB, BC, \ldots A'B', \ldots$ lassen sich auch die Verhältnisse zwischen den Kräften sehr einfach darstellen. Setzt man nämlich noch

$$BC.BD=i,\quad B'C'.B'D'=i',$$

so geht die Gleichung (5) über in:

$$p\,(ff'-gg'-hh')=2qii',$$

und wenn man darin für f, f', h aus (a) und (b) ihre Werthe setzt:

$$-pgh'=qii',$$

$$\text{folglich} \ldots\ p:q=-BC.B'D':AC.A'D',$$

$$\text{d. i. } \frac{P}{AA'}:\frac{Q}{BB'}=-\frac{BC}{AC}:\frac{A'D'}{B'D'}$$

$$=-\frac{BD}{AD}:\frac{A'C'}{B'C'} \text{ nach } (c)$$

woraus durch gehörige Vertauschung der Buchstaben sich die Verhältnisse zwischen je zwei der übrigen Kräfte ergeben.

Zugleich folgt hieraus, dass, wenn die Punkte A, B, C, D in der genannten Ordnung in der Geraden t auf einander folgen, und mithin auch A', B', C', D' die Folge der Punkte in der Geraden t' ist, und wenn

*) Vergl. Steiner Systemat. Entwickel. pag. 192.

P nach der Richtung AA' wirkt, Q die Richtung $-BB'$, d. i. $B'B$, hat. Auf eben die Weise zeigt sich, dass unter denselben Voraussetzungen CC' die Richtung von R und $D'D$ die Richtung von S ist.

§. 103.

Zusätze. *a.* Nicht je drei Kräfte können auf eine einzige Kraft reducirt werden, also auch nicht mit einer einzigen Kraft ins Gleichgewicht gebracht werden. Sind daher von den Richtungen der vier Kräfte P, Q, R, S, welche im Gleichgewichte seyn sollen, irgend drei, z. B. die von P, Q, R, willkührlich gegeben, so können nicht auch P, Q, R selbst nach Belieben genommen werden, und es muss folglich zwischen P, Q, R und den Grössen, welche die gegenseitige Lage der Richtungen dieser drei Kräfte bestimmen, eine Relation statt finden. Diese Relation ergiebt sich ebenfalls ganz leicht aus den vier Gleichungen (4). Denn multiplicirt man sie der Reihe nach mit p, q, r, s und zieht hierauf von der Summe der drei ersten die vierte ab, so kommt:

$$p.q.\ ab + p.r.\ ac + q.r.\ bc = 0,$$

und mit Zuziehung von (2):

$$P.Q.\frac{ab}{a.b} + P.R\frac{ac}{a.c} + Q.R\frac{bc}{b.c} = 0,$$

welches die gesuchte Gleichung ist. Sie drückt aus, dass die Summe der drei Pyramiden, welche P und Q, P und R, Q und R zu gegenüberliegenden Seiten haben, null ist. Denn so wie $\frac{P}{a}.ab$ die Pyramide darstellt, deren gegenüberliegende Seiten die Linie P, welche in a fällt, und b sind, so drückt $\frac{P}{a}\frac{Q}{b}.\ ab$ die Pyramide aus, die zu gegenüberliegenden Seiten zwei Linien hat, welche in a und b fallen, und deren Längen resp. P und Q sind, u. s. w.

b. Auf eine andere Weise, als vorhin geschah, lassen sich die Verhältnisse zwischen den vier Kräften folgendergestalt darstellen. Man multiplicire wiederum die Gleichungen (4) in ihrer Folge mit p, q, r, s und ziehe dann von der Summe je zweier die Summe der beiden andern ab; dies giebt:

$$p.q.\ ab = r.s.\ cd,$$
$$p.r.\ ac = q.s.\ bd,$$
$$p.s.\ ad = q.r.\ bc\ ^{*}),$$

und wenn man je zwei dieser drei Gleichungen mit einander multiplicirt:

$$p^2.\ ac.\ ad = q^2.\ bc.\ bd,$$
$$p^2.\ ab.\ ad = r^2.\ bc.\ cd,$$
$$p^2.\ ab.\ ac = s^2.\ bd.\ cd,$$

folglich .... $p:q:r:s =$

$$\sqrt{bc.\ bd.\ cd} : -\sqrt{ac.\ ad.\ cd} : \sqrt{ab.\ ad.\ bd} : -\sqrt{ab.\ ac.\ bc},$$

wo nur noch $\frac{P}{a}, \frac{Q}{b}, \ldots$ für $p, q, \ldots$ zu setzen sind, und wo die Vorzeichen so gewählt sind, wie sie statt finden müssen, wenn a, b, c, d die Ordnung ist, in welcher diese Linien von einer sie alle zugleich schneidenden Geraden getroffen werden.

Substituirt man diese Verhältnisswerthe von $p, q, \ldots$ in einer der Gleichungen (4), so ergiebt sich:

$$\sqrt{ab.\ cd} - \sqrt{ac.\ bd} + \sqrt{ad.\ bc} = 0,$$

welches die Bedingungsgleichung für die hyperboloidische Lage der vier Geraden a, b, c, d ist, die, wenn

---

*) Nach dem vorhin Bemerkten sind diese drei Gleichungen identisch mit: $PQ = RS$, $PR = QS$, $PS = QR$, und stellen daher den schon in §. 72. *c* gefundenen, von Chasles entdeckten, Satz dar. Auch ist die Schlussfolge, durch welche wir gegenwärtig zu diesem Satze gelangt sind, von der dortigen nicht wesentlich verschieden.

sie rational gemacht wird, mit der bereits erhaltenen (7), wie gehörig, zusammenfällt.

c. Durch Substitution derselben Werthe von p, q, r, s in (3) erhält man nachstehenden geometrischen Satz:

Sind a, b, c, d vier Gerade von beliebigen Längen und so gelegen, dass jede andere Gerade, welche drei derselben schneidet, auch die vierte trifft, so findet zwischen den Pyramiden ax, bx, cx, dx, welche eine beliebige fünfte Gerade x zur gemeinschaftlichen Kante und a, b, c, d zu gegenüberliegenden Kanten haben, immer eine lineare Relation statt. Es ist nämlich:

$$\sqrt{bc.\,bd.\,cd.}\; ax - \sqrt{ac.\,ad.\,cd.}\; bx + \sqrt{ab.ad.bd.}\; cx - \sqrt{ab.\,ac.\,bc.}\; dx = 0.$$

d. Heissen K, L, M, N die Momente irgend eines Systems in Bezug auf vier Axen, welche resp. in die hyperboloidisch gelegenen Linien a, b, c, d fallen, so bekommt man die Relation zwischen diesen Momenten, wenn man in letzterer Gleichung für ax, bx, cx, dx resp. $a.K$, $b.L$, $c.M$, $d.N$ setzt.

Siebentes Kapitel.

Von den Mittelpunkten der Kräfte.

§. 104.

Bei allen bisherigen Untersuchungen über Systeme von Kräften, die auf einen frei beweglichen festen Körper wirken, zogen wir bloss die Intensitäten und die Richtungen der Kräfte in Betracht, liessen aber

die Angriffspunkte, oder die Punkte der Richtungen, auf welche die Kräfte zunächst ihre Wirkung äusserten, unberücksichtigt, indem nach §. 14. *a.* eine Kraft ohne Aenderung ihrer Wirkung auf jeden Punkt ihrer Richtung verlegt werden konnte. In den noch folgenden Kapiteln dieses ersten Theils der Statik werden aber die Angriffspunkte der Kräfte stets mit in Rücksicht genommen werden. Wir werden uns nämlich vorstellen, dass die Lage des frei beweglichen festen Körpers, oder, was dasselbe ist: die Lage des frei beweglichen Systems der in unveränderlichen Entfernungen von einander stehenden Angriffspunkte, auf irgend eine Weise geändert werde, während die Kräfte mit unveränderter Intensität und nach Richtungen, die ihren anfänglichen parallel sind, auf die Angriffspunkte zu wirken fortfahren. Wir werden sodann untersuchen, ob und inwiefern durch diese Aenderung der Lage des Körpers die Wirkung der Kräfte sich ändert.

Haben die Kräfte anfänglich eine einfache Resultante, und findet es sich, dass bei jeder beliebigen Aenderung der Lage des Körpers die auf die anfänglichen Angriffspunkte parallel mit ihren anfänglichen Richtungen fortwirkenden Kräfte sich immer auf eine einfache Kraft reduciren lassen, und dass die Richtung dieser Resultante fortwährend einem und demselben Punkte des Körpers, oder allgemeiner: einem Punkte, welcher gegen die Angriffspunkte eine unveränderliche Lage hat, begegnet, so soll dieser Punkt d e r M i t t e l p u n k t d e r K r ä f t e heissen. Bringt man an ihm eine der Resultante gleiche aber entgegengesetzte Kraft an, so erfolgt Gleichgewicht, das auch bei beliebiger Veränderung der Lage des Körpers fortdauern wird. Eben so wird Gleichgewicht entstehen, wenn man den Mittel-

punkt unbeweglich macht, so dass der Körper nur noch um diesen Punkt gedreht werden kann, indem eine auf einen unbeweglichen Punkt eines Körpers gerichtete Kraft offenbar keine Bewegung erzeugen kann.

I. Von dem Mittelpunkte paralleler Kräfte.

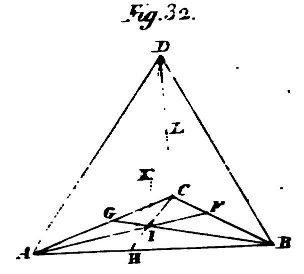
§. 105.

Auf zwei Punkte A und B (Fig. 32.) eines Körpers wirken zwei parallele Kräfte P und Q, welche kein Paar ausmachen und daher eine mit ihrer Richtung gleichfalls parallele Resultante $X=P+Q$ haben. Man theile die Gerade AB in H nach dem Verhältnisse $AH:HB=Q:P$, wobei H zwischen oder ausserhalb A und B fällt, jenachdem P und Q einerlei oder verschiedene Zeichen, d. h. einerlei oder entgegengesetzte Richtung haben. Die Resultante X trifft alsdann den Punkt H des Körpers (§. 26. a.), welches auch der Winkel ist, den die Kräfte P und Q mit der Geraden AB bilden, wie folglich auch die Lage des Körpers geändert werden mag, wenn nur die Kräfte P und Q parallel mit einander die Punkte A und B des Körpers zu treffen fortfahren; H ist folglich der Mittelpunkt der parallelen Kräfte P und Q, und wir folgern daraus:

Zwei parallele Kräfte, die kein Paar bilden, haben einen Mittelpunkt. Er liegt mit den Angriffspunkten der beiden Kräfte in einer Geraden und seine Abstände von den Angriffspunkten verhalten sich umgekehrt wie die den letztern zugehörigen Kräfte.

Kommt zu den zwei Kräften P, Q eine dritte ihnen parallele Kraft R hinzu, deren Angriffspunkt C ist, und ist H, wie vorhin, der Mittelpunkt der beiden

Fig. 32.



erstern, so sind alle drei Kräfte gleichwirkend mit den zwei auf H und C gerichteten $X, = P+Q,$ und $R,$ folglich gleichwirkend mit der einzigen auf I gerichteten Kraft $X+R, = P+Q+R,$ wenn HC in I nach dem Verhältnisse $HI:IC = R:P+Q$ getheilt wird. Der Punkt I der Ebene ABC, dessen Lage gegen A, B, C nur von der gegenseitigen Lage dieser Punkte und von den Verhältnissen zwischen den Intensitäten der Kräfte P, Q, R abhängt, ist daher der Mittelpunkt dieser Kräfte.

Hat man vier parallele Kräfte P, Q, R, S, welche auf die Punkte A, B, C, D eines Körpers wirken, so bestimme man wie vorhin den Mittelpunkt I der drei Kräfte P, Q, R, und schneide die Gerade ID, welche ihn mit dem Angriffspunkte D der vierten S verbindet, in K nach dem Verhältnisse $IK:KD = S:P+Q+R$. Eine durch K parallel mit P,.. gelegte Kraft $= P+Q+R+S$ ist dann immer die Resultante der vier Kräfte, K selbst folglich ihr Mittelpunkt.

Auf gleiche Weise kann man auch bei einem Systeme von fünf und mehrern Kräften zu Werke gehen und daher allgemein schliessen:

Bei einem Systeme paralleler Kräfte, die auf bestimmte Punkte eines festen Körpers wirken und eine einfache Resultante haben, giebt es einen Punkt, der gegen die Angriffspunkte eine bestimmte Lage hat, und welchen die Resultante immer trifft, wie auch die Lage des Körpers gegen die Kräfte geändert werden mag, — den Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

§. 106.

Zusätze und Folgerungen. *a.* Eben so, wie der Mittelpunkt zweier parallelen Kräfte mit ihren Angriffspunkten in gerader Linie liegt, so ist auch, wenn die Angriffspunkte dreier oder mehrerer parallelen Kräfte in einer Geraden sind, der Mittelpunkt der Kräfte immer in dieser Geraden enthalten. Gleicherweise ist von vier oder mehrern parallelen Kräften, deren Angriffspunkte in eine Ebene fallen, der Mittelpunkt in derselben Ebene befindlich.

b. Die Folge, in welcher man die Kräfte zur Bestimmung ihres Mittelpunktes nach und nach berücksichtigt, ist willkührlich. Denn könnte bei einer andern Folge ein anderer Mittelpunkt gefunden werden, so müsste bei jeder Lageänderung des Körpers die den Kräften stets parallele und den einen Mittelpunkt treffende Resultante immer auch dem andern begegnen, welches nicht möglich ist.

Statt daher bei drei parallelen Kräften P, Q, R, welche auf die Punkte A, B, C wirken, zuerst die Linie AB in H nach dem Verhältnisse $AH:HB = Q:P$ zu theilen, kann man auch damit anfangen, dass man den in BC liegenden Mittelpunkt F der Kräfte Q und R durch die Proportion $BF:FC = R:Q$ bestimmt. Der Punkt der Linie AF, welcher sie in dem Verhältnisse $R + Q : P$ theilt, muss dann ebenfalls der Mittelpunkt I aller drei Kräfte seyn. Die Linien AF und CH werden sich daher in I schneiden, und wenn man noch CA in G nach dem Verhältnisse $CG:GA = P:R$ theilt, so wird die Gerade GB gleichfalls durch I gehen.

Auf gleiche Art erhellet, dass, wenn man bei vier parallelen Kräften jede der sechs Kanten AB, BC,... der Pyramide $ABCD$, von welcher die Angriffspunkte

der Kräfte die Ecken sind, in dem umgekehrten Verhältnisse der auf die Enden der Kante wirkenden Kräfte resp. in H, F, ... theilt, jede der sechs durch eine Kante und den in der gegenüberliegenden Kante befindlichen Theilpunkt gelegten Ebenen, wie CDH, ADF, etc. den Mittelpunkt K der vier Kräfte enthält, und dass sich daher alle sechs Ebenen in diesem Punkte schneiden.

c. Es verhalten sich $P:Q = HB:AH$
$=$ die Dreiecke $HBC:AHC = HBI:AHI$,
folglich $= HBC - HBI : AHC - AHI$,
d. i. $P:Q = IBC:ICA$,
und eben so $Q:R = ICA:IAB$, d. h.

Der Mittelpunkt dreier parallelen Kräfte liegt in der Ebene der Angriffspunkte so, dass jedes der drei Dreiecke, welche der Mittelpunkt mit zwei Angriffspunkten bildet, der auf den dritten Angriffspunkt wirkenden Kraft proportional ist.

Bei den vier parallelen Kräften $P, .. S$ verhalten sich

$P:Q:R =$ die Dreiecke $IBC:ICA:IAB$
$=$ die Pyramiden $IDBC:IDCA:IDAB$
$=$ - - - $IKBC:IKCA:IKAB$
folglich $= IDBC - IKBC$: etc.
d. i. $= KDBC:KDCA:KDAB$, und eben so
$Q:R:S = KACD:KADB:KABC$,
folglich $P:Q:R:S =$
$KBCD : -KCDA : KDAB : -KABC$,
(vergl. §. 63. 1.) d. h.

Bei einem Systeme von vier parallelen Kräften ist jede Kraft, abgesehen vom Zeichen, der Pyramide proportional, welche der Mittelpunkt des Sy-

stems mit den Angriffspunkten der drei übrigen Kräfte bildet.

Uebrigens ist die Resultante der vorigen drei Kräfte dem Dreiecke ABC, und die Resultante dieser vier Kräfte der Pyramide $ABCD$, aus den Angriffspunkten selbst gebildet, proportional.

d. Sind die Kräfte P, Q, R, S einander gleich und von einerlei, nicht entgegengesetzter, Richtung, so ist vermöge der Proportionen im vorigen §.: $BH = HA$, $CI = 2.IH$, $DK = 3.KI$, also auch $CH = 3.IH$ und $DI = 4.KI$, woraus wir die Folgerung ziehen:

Der Mittelpunkt zweier einander gleichen und parallelen Kräfte ist der Mittelpunkt der ihre Angriffspunkte verbindenden Linie. — Von drei einander gleichen und parallelen Kräften liegt der Mittelpunkt in dem Dreieck ihrer Angriffspunkte so, dass er von jeder Seite des Dreiecks, diese Seite als Basis genommen, um den dritten Theil der Höhe entfernt ist. — Bei vier sich gleichen und parallelen Kräften ist der Mittelpunkt von jeder Seitenfläche der Pyramide der Angriffspunkte, wenn man diese Fläche als Basis betrachtet, um den vierten Theil der Höhe der Pyramide entfernt.

Unter derselben Voraussetzung, dass $P = Q = R = S$ ist, geben die in *c.* erhaltenen Proportionen folgenden Satz:

Eben so, wie der Mittelpunkt zweier sich gleichen und parallelen Kräfte die Linie zwischen ihren Angriffspunkten halbirt, so wird durch den Mittelpunkt drei solcher Kräfte das Dreieck der Angriffspunkte in drei einander gleiche Dreiecke, und durch den Mittelpunkt vier solcher Kräfte die Pyramide der Angriffspunkte in vier gleiche Pyramiden getheilt.

e. Die in §. 105 gegebene Methode, um den Mittelpunkt eines Systems paralleler Kräfte zu finden, lässt sich auch so abändern, dass man zuerst das System in zwei oder mehrere Systeme zerlegt und von jedem dieser Systeme besonders die Resultante und den Mittelpunkt bestimmt. Die Kräfte des ganzen Systems sind alsdann, auch bei jeder beliebigen Ortsveränderung des Körpers, gleichwirkend mit diesen ebenfalls einander parallelen Resultanten, welche die gefundenen Mittelpunkte resp. zu Angriffspunkten haben; und man wird daher den Mittelpunkt des ganzen Systems erhalten, wenn man von den Resultanten der einzelnen Systeme und ihren Mittelpunkten, als Angriffspunkten, den Mittelpunkt sucht.

So kann z. B. von vier einander gleichen und parallelen, auf $A, .. D$ wirkenden Kräften $P, .. S$ (Fig. 32.) der Mittelpunkt K auch so gefunden werden, dass man zuerst die Linien AB und CD in H und L halbirt, worauf K der Mittelpunkt der Linie HL seyn wird. Denn H und L sind die den Resultanten von P, Q und R, S zugehörigen Mittelpunkte, mithin u. s. w. Es folgt hieraus noch, dass die drei Geraden, welche die Mittelpunkte je zweier gegenüberstehender Kanten einer dreiseitigen Pyramide verbinden, sich in einem Punkte schneiden und daselbst einander halbiren.

§. 107.

Bei den im Vorhergehenden betrachteten Systemen paralleler Kräfte ist immer vorausgesetzt worden, dass die Kräfte eine Resultante haben, und folglich ihre Summe nicht $=0$ ist. Sey jetzt die Summe der Kräfte $=0$. Man zerlege das System in zwei Gruppen, bei deren keiner die Summe der zugehörigen Kräfte $=0$,

und was, wenn das System aus mehr als zwei Kräften besteht, immer auf mehrfache Art möglich ist. Die Summe der Kräfte der einen Gruppe sey $=X$, also die der andern $=-X$; von der erstern Gruppe sey M, von der letztern N der Mittelpunkt. Alsdann ist für jede Lage des Körpers das System der Kräfte gleichwirkend mit einem Paare, dessen Kräfte X und $-X$ die Angriffspunkte M und N haben. Das Moment dieses Paares ist dem Product aus X in den Abstand des einen der beiden Punkte M und N von einer durch den andern mit den Kräften gelegten Parallele gleich, also von einer Lage des Körpers zur andern veränderlich. Bei einer solchen Lage, wo die Gerade, welche M mit N verbindet, parallel mit den Kräften wird, — und solcher Lagen giebt es zwei, einander gerade entgegengesetzte, — ist das Moment des Paares $=0$, und es herrscht Gleichgewicht; und wie man dann auch das System in zwei Gruppen zertheilt, wird immer der Mittelpunkt der einen mit dem der andern, also auch der Angriffspunkt jeder einzelnen Kraft mit dem Mittelpunkte der jedesmal übrigen, in einer mit den Kräften parallen Geraden liegen.

Finden sich die beiden Mittelpunkte M und N identisch, so sind bei jeder Lage des Körpers die Kräfte im Gleichgewicht. Es muss folglich auch bei jeder andern Zerlegung eines solchen Systems in zwei Gruppen der Mittelpunkt der einen Gruppe mit dem der andern zusammenfallen, so wie der Angriffspunkt jeder einzelnen Kraft der Mittelpunkt der jedesmal übrigen seyn. Um ein System dieser Art zu erhalten, darf man nur zu einem Systeme paralleler Kräfte, welches einen Mittelpunkt hat, eine neue der Resultante des Systems gleiche, aber entgegengesetzte Kraft hinzufügen.

§. 108.

Alle die bisher auf synthetischem Wege erhaltenen Resultate lassen sich auch sehr leicht analytisch herleiten. Seyen von den Kräften P, P',..., auf ein System dreier Coordinatenaxen bezogen, die Angriffspunkte resp. (x, y, z), (x', y', z'), etc.; (x_1, y_1, z_1) irgend ein Punkt der Resultante, und a, b, c die Projectionen einer mit den Kräften parallel laufenden Linie auf die drei Axen. Alsdann sind, wenn man noch

$$(1) \ldots \frac{\Sigma xP}{\Sigma P} = \xi, \quad \frac{\Sigma yP}{\Sigma P} = \eta, \quad \frac{\Sigma zP}{\Sigma P} = \zeta \text{ setzt:}$$

$$(2) \ldots \frac{\xi - x_1}{a} = \frac{\eta - y_1}{b} = \frac{\zeta - z_1}{c}$$

die Gleichungen der Resultante (§. 73.)

Die Resultante trifft daher den Punkt, dessen Coordinaten ξ, η, ζ, sind; und da vermöge (1) diese Coordinaten bloss von den Intensitäten der Kräfte und den Coordinaten der Angriffspunkte, nicht aber von a, b, c, abhängen, so geht bei unveränderlich bleibenden Intensitäten und Angriffspunkten die Resultante immer durch denselben Punkt, wie auch die gegenseitige Lage des Systems der Angriffspunkte und der Richtungen der parallelen Kräfte sich ändern mag. (ξ, η, ζ) ist folglich der Mittelpunkt der Kräfte.

§. 109.

Folgerungen. *a.* Aus den Formeln (1) fliesst noch eine sehr einfache Methode zur Bestimmung des Mittelpunkts. Es wird nämlich nach ihnen der Abstand des Mittelpunkts von einer beliebig gelegten Ebene gefunden, wenn man die Kräfte in die Abstände ihrer resp. Angriffspunkte von dieser Ebene multiplicirt und

die Summe dieser Producte durch die Summe der Kräfte dividirt. Hat man auf diese Weise die Abstände des Mittelpunkts von drei sich in einem Punkte schneidenden Ebenen bestimmt, so ist damit der Mittelpunkt selbst gefunden.

b. Die Summe der Producte aus den Kräften in die Abstände ihrer Angriffspunkte von irgend einer durch den Mittelpunkt selbst gelegten Ebene ist daher immer $=0$.

c. Sind die Kräfte insgesammt einander gleich und nach einerlei Seite gerichtet, so ist der Abstand ihres Mittelpunkts von einer beliebigen Ebene gleich der Summe der Abstände ihrer Angriffspunkte von derselben Ebene, dividirt durch die Anzahl der Kräfte, also gleich dem arithmetischen Mittel letzterer Abstände.

d. Liegen die Angriffspunkte sämmtlicher Kräfte P, P', ... in einer Ebene und nimmt man dieselbe zur Ebene der x, y, so sind z, z', ... $=0$, folglich auch ΣzP und $\zeta=0$, also der Mittelpunkt in derselben Ebene enthalten. Befinden sich aber die Angriffspunkte insgesammt in einer Geraden, in der Axe der x zum Beispiel, so werden auf gleiche Weise η und $\zeta=0$, und der Mittelpunkt ist ebenfalls in dieser Geraden begriffen.

e. Bringt man im Mittelpunkte (ξ, η, ζ) eines Systems paralleler Kräfte P, P', ... eine neue ihrer Resultante gleiche, aber entgegengesetzte Kraft $=-\Sigma P$ an, so erhält man ein System, das bei jeder Lage des Körpers im Gleichgewichte bleibt. Da man nun vermöge der Gleichungen (1), $\Sigma xP+\xi(-\Sigma P)=0$, u. s. w. hat, so ist bei einem solchen Systeme die obige Summe der Producte für jede beliebige Ebene $=0$.

Vom Schwerpunkte.

§. 110.

Die Lehre vom Mittelpunkte paralleler Kräfte gewinnt dadurch noch ein besonderes Interesse, dass auf alle Theilchen der auf der Oberfläche unserer Erde befindlichen Körper fortwährend Kräfte wirken, deren Richtungen vertical, d. i. rechtwinklich auf der Oberfläche der Erde sind, und die daher bei einem und demselben Körper, so wie bei mehreren Körpern, deren Dimensionen und gegenseitige Entfernungen gegen den Durchmesser der Erde unbedeutend sind, als einander parallel angesehen werden können. Der Mittelpunkt aller dieser auf einen Körper wirkenden Kräfte heisst der Schwerpunkt, und ihre Resultante das Gewicht des Körpers. Indem man sich diese Kräfte als Theile einer einzigen sich über alle Theile der Körper verbreitenden Kraft denkt, nennt man letztere die Schwerkraft.

Die Einwirkung der Schwerkraft auf einen Körper, oder das Gewicht desselben, bleibt an einem und demselben Orte für alle Zeiten unverändert und ändert sich auch von einem Orte an oder nahe bei der Oberfläche der Erde zum andern nur wenig, indem es von einem Punkte des Aequators bis zu dem einen und andern Pole nur um $\frac{1}{194}$ zunimmt, und bei verticaler Erhebung des Körpers im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats seiner Entfernung vom Mittelpunkte der Erde abnimmt. Ueberhaupt bleibt das Verhältniss zwischen den Gewichten zweier Körper, die sich an einem und demselben Orte der Erde befinden, das nämliche, wenn sie beide an einen und denselben andern Ort gebracht

werden. Dieses von dem Orte, wo sich die Körper zugleich befinden, unabhängige Verhältniss ihrer Gewichte ist einerlei mit dem, welches man das Verhältniss ihrer **Massen** nennt, und man kann daher auch sagen: die auf jeden Theil eines Körpers wirkende Schwerkraft sey der Masse des Theils proportional.

Wenn je zwei Theile eines Körpers, die dem Inhalte nach einander gleich sind, auch gleiche Massen haben, so wird der Körper **gleichförmig dicht** genannt. Von zwei gleichförmig dichten Körpern heisst die Dichtigkeit des einen das $m$fache der Dichtigkeit des andern, wenn von zwei dem Inhalte nach gleichen Theilen des einen und andern Körpers die Masse des einen das $m$fache der Masse des andern ist. Bei gleichem Inhalte ist daher die Masse der Dichtigkeit proportional, und bei ungleichem Inhalte dem Product aus der Dichtigkeit in den Inhalt proportional, oder auch diesem Producte geradezu gleich, wenn man von einem gleichförmig dichten Körper, dessen Inhalt $=1$ und dessen Masse $=1$ gesetzt worden, auch die Dichtigkeit $=1$ setzt.

§. 111.

Zur Bestimmung des Schwerpunktes eines Körpers dienen die Formeln (1) in §. 108. Man denke sich den Körper in mehrere andere zerlegt, deren Massen $=m, m', m'', \ldots$ seyen. Resp. auf die Punkte (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z''), ... dieser Massen lasse man nach einerlei Richtung parallele den Massen proportionale Kräfte wirken, und sey (ξ, η, ζ) der Mittelpunkt dieser Kräfte, so hat man nach jenen Formeln:

$$(a) \quad \xi = \frac{mx + m'x' + m''x'' + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots}$$

und ähnliche Gleichungen für η und ζ. Diese Gleichungen geben für ξ, η, ζ nach und nach andere Werthe, wenn man für (x, y, z), (x', y', z'),... andere und andere Punkte der Massen m, m',... wählt. Es hört aber diese Veränderlichkeit der Werthe von ξ, η, ζ auf, wenn man den Körper in unendlich viele Theile zerlegt, deren jeder nach allen Dimensionen unendlich klein ist. Denn je kleiner man die Dimensionen der Theile seyn lässt, desto geringer wird der Unterschied zwischen den äussersten Werthen, die jede der Coordinaten x, y, z, x',... haben kann; desto kleiner werden mithin die Aenderungen, welche die Producte mx, $m'x'$,... erleiden können, gegen die Producte selbst; desto mehr nähern sich folglich ξ, η, ζ gewissen Grenzwerthen, die sie aber erst dann erreichen, wenn die Theilchen unendlich klein geworden sind. Und diese Grenzwerthe sind die Coordinaten des Schwerpunktes.

Bezeichnen daher dm die Masse eines nach allen Dimensionen unendlich kleinen Elementes des Körpers und x, y, z die Coordinaten dieses Elementes, so sind die des Schwerpunktes:

$$(A) \ldots \xi = \frac{\int x\,dm}{\int dm},\ \eta = \frac{\int y\,dm}{\int dm},\ \zeta = \frac{\int z\,dm}{\int dm}.$$

Es ist aber bei einem rechtwinkligen Coordinatensysteme, wenn man sich den Körper durch Ebenen, die mit den Coordinatenebenen parallel sind, in unendlich kleine rechtwinklige Parallelepipeda zerlegt denkt, der Inhalt desjenigen, welches den Coordinaten x, y, z entspricht, $= dx\,dy\,dz$, und daher, wenn ϱ die Dichtigkeit des Körpers im Punkte (x, y, z) ausdrückt:

$$dm = \varrho\, dx\, dy\, dz.$$

Diesen Werth von dm hat man nun in (A) zu substituiren und hierauf die angedeuteten Integrationen

innerhalb der den Körper einschliessenden Flächen, deren Gleichungen gegeben seyn müssen, auszuführen. Die Dichtigkeit ϱ wird dabei, als eine Function von x, y, z, gegeben vorausgesetzt. Ist der Körper gleichförmig dicht, also ϱ constant, so geht ϱ aus den Formeln (A) heraus; der Schwerpunkt ist dann folglich bloss von der Gestalt des Körpers abhängig.

Aehnlicher Weise kann man auch den Schwerpunkt einer blossen Fläche, ja selbst einer Linie zu bestimmen suchen, indem man sich jedes Element der Fläche oder der Linie, als von einer der Wirkung der Schwerkraft unterworfenen Masse gebildet, denkt, einer Masse, die der Grösse des Elements und der daselbst herrschenden Dichtigkeit proportional ist. Die allgemeinen Ausdrücke für die Coordinaten des Schwerpunkts einer Fläche oder Linie wird man daher erhalten, wenn man in den obigen Ausdrücken das einemal

$$dm = \varrho \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \cdot dx\, dy$$

und das anderemal

$$dm = \varrho \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

setzt. Die Anwendung dieser allgemeinen Formeln auf bestimmte Fälle übergehe ich, da solche Anwendungen in den bisherigen Lehrbüchern der Statik zur Genüge angetroffen werden.

Zusatz. Sind die Massen m, m', ..., in die man sich einen Körper zerlegt denkt, nicht unendlich klein, sondern von endlicher Grösse, so ergeben sich mittelst der Formeln (a) nichtsdestoweniger die Coordinaten des Schwerpunktes des Körpers, wenn nur für (x, y, z), (x', y', z'), ... die Schwerpunkte der einzelnen Massen genommen werden. Denn da die auf einen Körper

wirkende Schwerkraft bei jeder Verrückung desselben gleichwirkend mit einer verticalen, an seinem Schwerpunkte angebrachten und seiner Masse proportionalen Kraft bleibt, und dasselbe auch rücksichtlich der Masse und des Schwerpunktes jedes Theiles des Körpers gilt, so müssen verticale Kräfte, die an den Schwerpunkten der einzelnen Theile eines Körpers angebracht und den Massen der Theile proportional sind, stets gleiche Wirkung mit einer der Masse des ganzen Körpers proportionalen und auf seinen Schwerpunkt vertical gerichteten Kraft haben.

Zufolge der Formeln (a) ist daher

die Summe der Producte aus den Massen der einzelnen Theile eines Körpers in die Abstände ihrer Schwerpunkte von einer beliebigen Ebene gleich dem Product aus der Masse des ganzen Körpers in den Abstand seines Schwerpunkts von derselben Ebene.

§. 112.

Unter Voraussetzung gleichförmiger Dichtigkeit lässt sich der Schwerpunkt einer geraden Linie, einer von geraden Linien begrenzten Ebene und eines von Ebenen begrenzten Körpers auch ohne Gebrauch der Infinitesimalrechnung oder der sonst ihre Stelle vertretenden Exhaustionsmethode finden, wenn man nur den Satz zu Ende des vor. §. und den schon von Archimedes aufgestellten Grundsatz zu Hülfe nimmt, *dass ähnliche Figuren ähnlich liegende Schwerpunkte haben**).

Seyen AB und $A'B'$ zwei einander parallele Gerade und a, b, a', b' die Abstände der Punkte A, B,

---

*) Archimedes vom Gleichgewichte ebener Flächen, 6te Forderung.

A', B' von einer beliebig gelegten Ebene; alsdann verhält sich:

$$a-b:a'-b'=AB:A'B'.$$

Hat man daher zwei einander ähnliche und parallel liegende Figuren, d. h. welche so liegen, dass, wenn A, B irgend zwei Punkte der einen und A', B' die ihnen entsprechenden Punkte der andern Figur sind, die Linien AB und $A'B'$ parallel laufen; werden ferner, wie eben jetzt, so auch in der Folge die Abstände der Punkte von einer beliebigen Ebene mit den gleichnamigen Buchstaben aus dem kleinen Alphabete bezeichnet, und drückt $m:m'$ das constante Verhältniss aus, in welchem jede Linie der einen Figur zu der entsprechenden Linie der andern steht: so verhält sich:

$$a-b:a'-b'=m:m'.$$

Ist dabei A oder B der Schwerpunkt der einen Figur, so ist nach Archimedes Grundsatz A' oder B' der Schwerpunkt der andern.

Um nun, dieses vorausgeschickt,

1) den Schwerpunkt einer geraden Linie AB (Fig. 33.) zu finden, verlängere man dieselbe nach E, bis $BE=AB$. Seyen von AB, BE, AE die Schwerpunkte P, Q, R, so ist nach dem Satze des vor. §., da wegen der angenommenen gleichförmigen Dichtigkeit die Massen der Linien ihren Längen proportional sind

$$p+q=2r,$$

und weil zufolge des archimedischen Grundsatzes P, Q, R ähnlich liegende Punkte in den nach einerlei Richtung liegenden Geraden AB, BE, AE sind:

$$p-a:q-b:r-a=1:1:2,$$

folglich $p-a=q-b=\frac{1}{2}(r-a)$.

Werden hiermit q und r aus der vorigen Gleichung eliminirt, so kommt:

$$p = \tfrac{1}{2}(a+b).$$

Der Schwerpunkt einer geraden Linie ist also derselbe, den ihre zwei Endpunkte, als zwei einander gleiche Massen betrachtet, haben (§. 109. c.), *und ist folglich der Mittelpunkt der Linie* (§. 106. d.).

2) Den Schwerpunkt der Fläche eines Parallelogramms $ABCD$ zu finden. — Man verlängere AB nach E und AD nach I, bis $BE = AB$ und $DI = AD$, construire das Parallelogramm $AEGI$, und verlängere noch DC bis zum Durchschnitte F mit EG, und BC bis zum Durchschnitte H mit IG. Von dem gegebenen Parallelogramme AC, den drei durch diese Construction entstandenen, ihm gleichen und ähnlichen Parallelogrammen BF, CG, DH, und von dem aus allen vier zusammengesetzten Parallelogramme AG seyen die Schwerpunkte der Reihe nach P, Q, R, S, T; so hat man, weil bei der hier immer vorausgesetzten gleichförmigen Dichtigkeit die Masse jeder dieser Flächen ihrem Inhalte proportional ist:

$$p + q + r + s = 4t;$$

und weil sämmtliche fünf Parallelogramme einander ähnliche und parallel liegende Figuren sind, und die Punkte A, B, C, D, A ebenso, wie P, Q, R, S, T, in ihnen auf ähnliche Weise liegen:

$$p - a = q - b = r - c = s - d = \tfrac{1}{2}(t - a).$$

Drückt man hiermit in voriger Gleichung die Werthe von q, r, s, t durch p, a, b, c, d aus, so kommt:

$$p = \tfrac{1}{4}(a + b + c + d).$$

Der Schwerpunkt eines Parallelogramms wird mithin eben so gefunden, wie der Schwerpunkt von vier an den vier Ecken der Figur angebrachten einander gleichen Massen und ist daher der gemeinschaftliche Mittelpunkt der beiden Diagonalen,

also auch einerlei mit dem Schwerpunkte zweier an den zwei Endpunkten einer Diagonale befindlichen gleichen Massen, d. i.

$$p = \tfrac{1}{2}(a+c) = \tfrac{1}{2}(b+d).$$

3) Den Schwerpunkt eines Parallelepipedums zu finden. — Indem man die drei in einer Ecke des Körpers zusammenstossenden Kanten verlängert, bis die Verlängerungen den Kanten selbst gleich werden, und auf ganz ähnliche Art, wie vorhin, weiter verfährt, ergiebt sich, dass *der Schwerpunkt eines Parallelepipedums der gemeinschaftliche Mittelpunkt der drei Diagonalen, also einerlei mit dem Schwerpunkte aller acht Ecken ist, wenn diese als gleichschwere Punkte betrachtet werden.*

4) Den Schwerpunkt einer Dreiecksfläche ABC (Fig. 34.) zu finden. — Man halbire die Seiten BC, CA, AB resp. in D, E, F und ziehe DE, EF. Hiermit hat man die drei einander ähnlichen und parallel liegenden Dreiecke AFE, EDC, ABC, deren Lineardimensionen sich wie $1:1:2$ verhalten, und in denen resp. A, E, A ähnliche liegende Punkte sind. Nennt man daher Q, R, S die Schwerpunkte dieser Dreiecke und P den Schwerpunkt des Parallelogramms BE, so verhält sich nach Archimedes Grundsatz

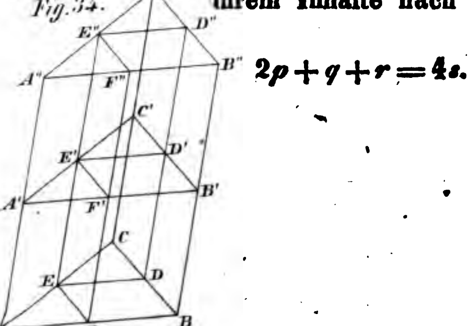
$$q-a : r-e : s-a = 1:1:2$$

also $q-a = r-e = \tfrac{1}{2}(s-a)$,

folglich . . . . . $q+r = s+e$;

auch ist nach 2) . . . . . $p = \tfrac{1}{2}(b+e)$.

Nach vor. §. aber ist, weil sich die Figuren BE, AFE, EDC und das aus ihnen zusammengesetzte ... ihrem Inhalte nach wie $2:1:1:4$ ver-



$$2p+q+r = 4s.$$

Eliminirt man hieraus p, q, r, so kommt:

$$b+2e=3s$$

und, weil E der Mittelpunkt von CA, und daher $2e=c+a$ ist:

$$s=\frac{1}{3}(a+b+c).$$

Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche ist daher einerlei mit dem Schwerpunkte der drei Ecken des Dreiecks, diese als gleichschwere Punkte betrachtet, also einerlei mit dem Punkte, von welchem aus das Dreieck sich in drei einander gleiche Theile theilen lässt.

5) Den Schwerpunkt eines dreiseitigen Prisma $ABCA''B''C''$ zu finden. — Man halbire die parallelen Seitenkanten AA'', BB'', CC'' in A', B', C' und die Seiten der drei einander gleichen und ähnlichen und parallel liegenden Dreiecke ABC; $A'B'C'$; $A''B''C''$ in D, E, F; D', E', F'; D'', E'', F''. Hiermit kann man das Prisma, dessen Inhalt man $=8$ setze, und dessen Schwerpunkt S heisse, zerlegen: in ein Parallelepipedum BE'', dessen Inhalt $=4$ ist, und dessen Schwerpunkt P sey, und in vier dem gegebenen Prisma ähnliche und mit ihm parallel liegende Prismen $AFEA'F'E'$, $EDCE'$.., $A'F'E'A''$.., $E'D'C'E''$.., die insgesammt einerlei Inhalt $=1$ haben, und deren Schwerpunkte resp. Q, R, Q', R' seyen. In diesen vier Prismen sind resp. A, E, A', E' mit dem Punkte A des gegebenen Prisma ähnlich liegende Punkte, und man hat daher dem Grundsatze zufolge:

$$q-a=r-e=q'-a'=r'-e'=\frac{1}{2}(s-a),$$

$$\text{mithin } q+r+q'+r'=2s-a+e+a'+e'$$
$$=2s+2e',$$

weil die Linien AE' und EA' sich in ihren Mittelpunkten schneiden, und daher $a+e'=a'+e$ ist.

Da ferner der Schwerpunkt P des Parallelepipedums BE'' der Mittelpunkt der Linie BE'', folglich auch der Linie $B'E'$ ist, so hat man:

$$p = \tfrac{1}{2}(b' + e').$$

Sodann ist nach vor. §.:

$$4p + q + q' + r + r' = 8s.$$

Hieraus folgt nach Elimination von p, q, q', r, r' mittelst der vorigen Gleichungen:

$$4d' + 2b' = 6s, \text{ und weil } 2d' = c' + a',$$

$$s = \tfrac{1}{3}(a' + b' + c'), \text{ oder weil } 2a' = a + a'', \text{ etc.}$$

$$s = \tfrac{1}{6}(a + b + c + a'' + b'' + c'').$$

Der Schwerpunkt eines dreiseitigen Prisma fällt daher zusammen mit dem Schwerpunkte seiner sechs Ecken, also auch mit dem Mittelpunkte der Linie, welche die Schwerpunkte der zwei parallelen Flächen des Prisma verbindet.

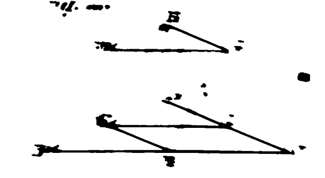
6) Den Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide $ABCD$ (Fig. 35.) zu finden. — Man halbire die sechs Kanten AD, BD, CD, BC, CA, AB in E, F, G, H, I, K und lege die drei Ebenen EFG, EIK, $EGHK$. Hierdurch wird die Pyramide $ABCD$ in zwei ihr ähnliche und mit ihr parallel liegende Pyramiden $AKIE$, $EFGD$ und in zwei dreieckige Prismen $BKHFEG$, $HGCKEI$ zerlegt, welche vier Körper dem Inhalte nach sich zu einander und zu der gegebenen Pyramide wie 1 : 1 : 3 : 3 : 8 verhalten. Sind daher P, Q, R, S, T die Schwerpunkte aller dieser fünf Körper, so haben wir zuerst

$$p + q + 3r + 3s = 8t;$$

sodann, weil A, E, A resp. in den Pyramiden $AKIE$, $EFGD$, $ABCD$ ähnlich liegende Punkte sind:

$$p - a = q - e = \tfrac{1}{2}(t - a),$$

folglich $p + q = t + e$,



und endlich nach dem Vorigen:

$$r = \frac{1}{6}(b+f+e+h+g+k),$$
$$s = \frac{1}{6}(c+i+e+h+g+k).$$

Es ist aber $b+d=2f$, $a+c=2i$ u. s. w. folglich
$$a+b+c+d=2f+2i=2e+2h=2g+2k,$$
und daher, wenn wir jede dieser vier einander gleichen Summen $=4u$ setzen:
$$r+s=\frac{1}{6}(b+c+10u)=\frac{1}{6}(2h+10u).$$

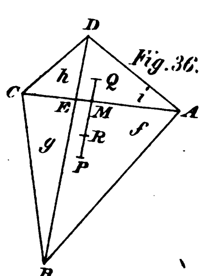
Mit diesen Werthen für $p+q$ und $r+s$ wird nun die zuerst stehende Gleichung:
$$8t=t+e+h+5u=t+7u,$$
folglich ... $t=u=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$.

*Der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide ist daher einerlei mit dem Schwerpunkte ihrer vier Ecken, also mit dem Punkte, von welchem aus sie in vier gleiche Theile getheilt werden kann.**)

§. 113.

Nachdem wir somit den Schwerpunkt eines Dreiecks und einer dreiseitigen Pyramide zu finden gelernt haben, ist es nun leicht, von jeder andern mit geraden Linien begrenzten Ebene und jedem andern mit Ebenen begrenzten Körper den Schwerpunkt zu bestimmen, da sich alle diese Figuren durch Diagonallinien und Diagonalflächen in Dreiecke und Pyramiden zerlegen lassen.

Werde z. B. der Schwerpunkt des ebenen Vierecks *ABCD* (Fig. 36.) gesucht. — Man theile das Viereck durch die Diagonale *AC* in die zwei Dreiecke *ABC*, *CDA* und bestimme nach dem Vorigen ihre Schwer-



*) Auf ähnliche Art, wie hier, hat bereits Poinsot in seinen *Élémens de Statique* 4 ème edit. pag. 180 und pag. 186. den Schwerpunkt des Dreiecks, des Prisma und der Pyramide zu finden gelehrt.

punkte, welche P, Q seyen. Der Schwerpunkt des Vierecks ist alsdann der Mittelpunkt zweier parallelen auf P, Q wirkenden und den Dreiecksflächen ABC, CDA proportionalen Kräfte. Theilt man daher die Gerade PQ in R so, dass $PR:RQ = CDA:ABC$, so wird R der gesuchte Schwerpunkt seyn (§. 105.).

Hiernach kann man auch, wenn die Abstände der Ecken des Vierecks von irgend einer Ebene gegeben sind, den Abstand des Schwerpunkts von der Ebene finden. Es ist nämlich, wenn wir diese Abstände, wie im vorigen §., mit den Buchstaben des kleinen Alphabets bezeichnen, welche den grossen Buchstaben entsprechen, womit die Punkte benannt sind:

$$(1) \quad 3p = a + b + c, \quad 3q = a + c + d$$

$$\text{und} \quad ABCD . r = ABC . p + CDA . q,$$

oder, wenn man die vier Dreiecke EAB, EBC, ECD, EDA, in welche das Viereck durch seine Diagonalen getheilt wird, resp. $= f, g, h, i$ setzt und erwägt, dass sich $ABCD : ABC : CDA = DAB : EAB : EDA = i + f : f : i$ verhalten:

$$(i + f) r = fp + iq$$

und wenn man hierin für p und q ihre Werthe aus (1) setzt:

$$(2) \ldots (i + f)(3r - a - c) = fb + id.$$

Gleicherweise findet sich:

$$(3) \ldots (f + g)(3r - b - d) = gc + fa.$$

Durch Verbindung dieser zwei Gleichungen kann man den Abstand r auch durch drei der vier Abstände a, b, c, d allein ausdrücken und damit zu noch andern nicht uninteressanten Folgerungen gelangen. Um z. B. a zu eliminiren, schreibe man zuerst statt der Gleichung (3), weil sich $f:g = i:h = f + i : g + h$ verhält:

$$(f + g + h + i)(3r - b - d) = (g + h) c + (i + f) a.$$

Hiervon die Gleichung (2) abgezogen, kommt:

$$3(g+h)r = (g+h+i)b + (g+h-i-f)c$$
$$+(f+g+h)d,$$

d. h. R ist der Mittelpunkt dreier parallelen Kräfte, welche B, C, D zu Angriffspunkten haben und den Coefficienten von b, c, d in dieser Gleichung proportional sind. Nach §. 106. c. verhalten sich folglich die Dreiecke

$$RBC : RCD = f+g+h : g+h+i.$$

Setzen wir daher noch die Dreiecke RAB, RBC, RCD, RDA, welche der Schwerpunkt des Vierecks mit den Seiten des letztern bildet, resp. $= F, G, H, I$, und die Vierecksfläche $= V$, so verhalten sich

$$G : H = V-i : V-f$$

und eben so $H : I : F = V-f : V-g : V-h$,
folglich $F : F + .. + I = V-h : 4V-(f+..+i)$.
Es ist aber $F+G+H+I = f+g+h+i = V$; mithin
$F = \frac{1}{3}(V-h)$, und auf gleiche Art

$$G = \frac{1}{3}(V-i),\ H = \frac{1}{3}(V-f),\ I = \frac{1}{3}(V-g),$$

oder $F = \frac{1}{3}(i+f+g)$, $G = \frac{1}{3}(f+g+h)$, etc.
woraus noch $F+G-f-g = \frac{1}{3}(h+i-f-g)$
d. i. $RCA = \frac{1}{3}(ABC - CDA)$ folgt.

Der Schwerpunkt einer Vierecksfläche liegt demnach so, dass immer das Dreieck, welches er mit einer Seite des Vierecks bildet, dem dritten Theil der Summe der drei Dreiecke gleich ist, welche der Durchschnitt der Diagonalen mit derselben Seite und den zwei angrenzenden Seiten macht; oder (weil $3F+h = V$ ist,) *dass das Dreieck des Schwerpunkts mit einer Seite, dreimal genommen, und dazu das Dreieck des Diagonalendurchschnitts mit der gegenüberliegenden Seite addirt, die Fläche des ganzen Vierecks ausmacht. Auch ist das Dreieck des*

Schwerpunkts mit der einen Diagonale gleich dem dritten Theile des Unterschieds zwischen den zwei Dreiecken, in welche das Viereck durch die Diagonale getheilt wird.

Noch eine merkwürdige Relation besteht zwischen den vier Dreiecken F, G, H, I selbst, welche der Schwerpunkt mit den vier Seiten des Vierecks bildet. Man erhält diese Relation, wenn man in der Proportion $f:g=i:h$ für $f, g, \ldots$ ihre Werthe $V-3H$, $V-3I, \ldots$ setzt. Hiermit kommt:

$$V(F+H-G-I)=3(FH-GI).$$

Wegen $V=F+\ldots+I$ reducirt sich dieses auf:

$$F^2-FH+H^2=G^2-GI+I^2,$$

eine Gleichung, welcher man auch die Form geben kann:

$$(F+G+H+I)(F-G+H-I)$$
$$+3(F+G-H-I)(F-G-H+I)=0.$$

Zusatz. Die in voriger Rechnung gefundene Gleichung: $BCA=\frac{1}{3}(ABC-CDA)$, kann sehr einfach auch folgendergestalt hergeleitet werden. — Es verhält sich

$$PR:RQ=DAC:BCA,$$

und weil $DAC=3QAC$ und $BCA=3PCA$ ist (§. 112. 4.):

$$PR:RQ=QAC:PCA$$
$$=MQ:PM,$$

wenn PQ von der Diagonale AC in M geschnitten wird. Aus letzterer Proportion folgt aber unmittelbar:

$$PR=MQ, \text{ mithin } RM=PM-MQ$$

und $BCA=PCA-QAC=\frac{1}{3}(BCA-DAC)$, wie zu erweisen war.

Zugleich sieht man aus der Gleichung $PR=MQ$, wie man aus den Schwerpunkten P und Q der beiden

Dreiecke ABC und CDA den Schwerpunkt R des Vierecks auf das einfachste bestimmen kann.

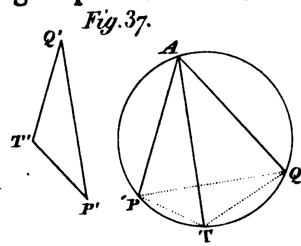
II. Von dem Mittelpunkte nicht paralleler in einer Ebene wirkender Kräfte.

§. 114.

Streng genommen, hat nur ein System paralleler Kräfte einen Mittelpunkt. Indessen lässt sich auch bei einem Systeme nicht paralleler, in einer Ebene wirkender Kräfte ein Mittelpunkt angeben, wenn nur die Aenderung der Lage des Körpers der Bedingung unterworfen wird, dass die Ebene der Kräfte sich parallel bleibt, und daher der Körper nur um eine auf dieser Ebene normale Axe gedreht werden kann, während die Axe selbst entweder unbewegt gelassen, oder parallel mit sich fortgeführt wird. Dass bei einer so bedingten Lageänderung des Körpers, und wenn die Kräfte auf ihre anfänglichen Angriffspunkte parallel mit ihren anfänglichen Richtungen zu wirken fortfahren, die Resultante der Kräfte, wenn sie anders eine solche haben, immerfort demselben Punkte des Körpers begegnet; dass folglich, wenn dieser Punkt unbeweglich gemacht wird, die Kräfte bei jeder Lage, in die der Körper durch Drehung um eine durch den Punkt gehende und auf jener Ebene normale Axe gebracht werden kann, sich das Gleichgewicht halten: dies wird aus nachstehenden Betrachtungen ohne Mühe erhellen.

§. 115.

Seyen PA und QA (Fig. 37.) zwei in einer Ebene liegende und sich in A schneidende Richtungen zweier Kräfte; P und Q die Angriffspunkte der Kräfte und



TA die Richtung der Resultante derselben. Ob nun die zwei Kräfte auf die Punkte P und Q des Körpers parallel mit ihren jetzigen Richtungen fortwirken, während der Körper um einen beliebigen Winkel α um eine auf der Ebene PQA normale Axe gedreht wird, oder ob man den Körper in Ruhe lässt, dagegen aber die Richtungen PA und QA um die Angriffspunkte P und Q nach der, der vorigen entgegengesetzten, Seite, jede um denselben Winkel, $=\alpha$, in der Ebene dreht, ist hinsichtlich der gegenseitigen Lage des Körpers und der Richtungen der Kräfte offenbar einerlei. Es geschehe das Letztere, so bleibt die Grösse des Winkels von QA mit PA unverändert, und die Spitze A desselben beschreibt einen durch die Punkte P und Q gehenden Kreis. Da also die Intensitäten der beiden Kräfte und die Winkel ihrer Richtungen unverändert bleiben, so werden auch die Intensität der Resultante und die Winkel TAP, TAQ der Resultante mit den beiden Kräften sich nicht ändern. Ist daher T der Durchschnitt der Resultante mit dem Kreise beim Anfange der Drehung, so wird auch fernerhin die Resultante den Kreis in T treffen, indem der Bogen PT das Doppelte des constanten Winkels PAT misst. Die Resultante wird sich daher um denselben Winkel α und nach derselben Seite, wie jede der beiden Kräfte, um den Punkt T drehen; T wird folglich der Mittelpunkt der beiden Kräfte seyn.

Sind demnach in einer Ebene zwei Kräfte und ihre Angriffspunkte gegeben, so findet sich der Mittelpunkt der Kräfte als der Durchschnitt ihrer Resultante mit dem durch die Angriffspunkte und den Durchschnitt der Richtungen der beiden Kräfte zu beschreibenden Kreise.

Sind die zwei Kräfte mit einander parallel, so liegt ihr Durchschnittspunkt unendlich entfernt, der zu beschreibende Kreis wird unendlich gross, und der Bogen desselben durch die beiden Angriffspunkte verwandelt sich in eine gerade Linie, so dass, wie wir bereits im Obigen (§. 105.) sahen, von zwei parallelen Kräften der Mittelpunkt mit den beiden Angriffspunkten in einer Geraden liegt.

Es erhellet nun leicht, wie auch von drei und mehreren Kräften in einer Ebene der Mittelpunkt gefunden werden kann. — Seyen p, q, r drei solcher Kräfte und P, Q, R ihre Angriffspunkte. Man suche erstlich von p und q die Resultante t und den in ihr liegenden Mittelpunkt T. Man suche zweitens von den Kräften t und r, deren Angriffspunkte T und R sind, die Resultante s und den in ihr befindlichen Mittelpunkt S, so wird S auch der Mittelpunkt der drei Kräfte p, q, r seyn. Denn werden sämmtliche Kräfte p, q, r, t, s um die Punkte P, Q, R, T, S um gleiche Winkel nach einerlei Seite in der Ebene gedreht, — als welches mit der Drehung des Körpers nach der entgegengesetzten Seite auf Eines hinauskommt, — so sind auch nach dieser Drehung p und q noch gleichwirkend mit t, und t und r gleichwirkend mit s, folglich auch p, q, r gleichwirkend mit s; folglich S der zu bestimmende Mittelpunkt. — Hat man vier Kräfte mit ihren Angriffspunkten, so wird die Resultante und der Mittelpunkt von dreien dieser Kräfte in Verbindung mit der vierten Kraft und ihrem Angriffspunkte die Resultante und den Mittelpunkt aller vier Kräfte geben, u. s. w.

Jedes System von Kräften in einer Ebene, welches auf eine Kraft reducirbar ist, hat demnach

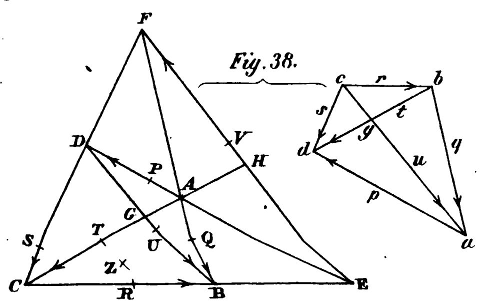
einen Mittelpunkt; oder, wie wir diesen Satz auch noch ausdrücken können:

Sind von mehrern Kräften in einer Ebene, welche eine einfache Resultante haben, die Intensitäten, die Winkel, welche ihre Richtungen mit einander bilden, und in der Richtung einer jeden irgend ein Punkt gegeben, so kann man daraus die Intensität der Resultante, den Winkel ihrer Richtung mit jeder der erstern Richtungen und einen in ihrer Richtung liegenden Punkt finden, — nämlich den Mittelpunkt des Systems, wenn erstere Punkte als die Angriffspunkte der Kräfte genommen werden.

§. 116.

Eben so, wie ein System von parallelen Kräften, hat auch ein System von Kräften in einer Ebene nur einen Mittelpunkt. Denn gäbe es noch einen zweiten, so müsste die Resultante des Systems nicht nur sie beide enthalten, sondern auch, nachdem sie das einemal um den einen, das anderemal um den andern nach einerlei Seite zu um einerlei Winkel von beliebiger Grösse gedreht worden wäre, in beiden Fällen einerlei Wirkung haben; welches nicht möglich ist. In welcher Ordnung man daher auch die Kräfte nach und nach mit einander verbindet, um zu ihrem Mittelpunkte zu gelangen, so muss zuletzt doch immer derselbe Punkt gefunden werden. Diese Bemerkung kann uns zur Entdeckung mehrerer geometrischer Sätze führen.

Seyen, um dieses nur an dem einfachsten Beispiele zu zeigen, p, q, r drei Kräfte in einer Ebene, AD, AB, CB (Fig. 38.) ihre Richtungen und die Punkte P, Q, R dieser Linien die Angriffspunkte der Kräfte. Von p und q sey t die Resultante und AC ihre Rich-



tung; von t und r sey s die Resultante und DC ihre Richtung; also s auch die Resultante von p, q, r.

Um nun den in DC liegenden Mittelpunkt von p, q, r zu finden, beschreibe man erstlich durch P, Q und A einen Kreis, welcher AC noch in T schneide, und es wird T der Mittelpunkt von p und q, oder der Angriffspunkt von t seyn. Man beschreibe ferner einen Kreis durch T, R und C, so wird sein Durchschnitt S mit DC der Mittelpunkt von t und r, d. i. von p, q und r, also der gesuchte, seyn.

Es lässt sich aber dieser Mittelpunkt noch auf zwei andere Arten bestimmen. — Da die vier Kräfte $p, q, r, -s$ im Gleichgewichte sind, so ist die Resultante von q und r, welche u heisse, einerlei mit der Resultante von $-p$ und s, und die gemeinschaftliche Richtung beider ist DB. Bezeichnet ferner E den Durchschnitt von AD mit CB, und F den Durchschnitt von AB mit DC, so geht die Resultante von p und r, welche man v nenne, durch E, und die Resultante von $-q$ und s durch F; und da wegen des gedachten Gleichgewichts auch diese zwei Resultanten identisch sind, so ist EF ihre gemeinschaftliche Richtung.

Indem man nun zuerst q und r zu u vereiniget und hierauf u und p zu s zusammensetzt, beschreibe man einen Kreis durch Q, R, B, welcher DB, als die Richtung von u, in U, dem Mittelpunkte von q und r, treffe, und einen Kreis durch U, P, D, welcher DC ebenfalls in S schneiden wird.

Endlich kann man auch von den drei Kräften p, q, r zuerst p mit r zu v, und alsdann v mit q zu s verbinden. Man beschreibe deshalb durch P, R, E einen Kreis, welcher EF, als die Richtung von v, in V schneide, so ist V der Mittelpunkt von p und r; und

es wird ein durch V, Q und F gelegter Kreis der BC gleicherweise in S begegnen.

Erwägen wir nun noch, dass die drei Richtungen von Kräften, AD, AB, CB, und die in ihnen liegenden Punkte P, Q, R, so wie die Richtungen CA, DB der durch A und B gehenden Resultanten ganz nach Belieben genommen werden können, so liefert uns die Zusammennahme der drei verschiedenen Arten, den Punkt S zu finden, folgendes Theorem:

> Hat man ein ebenes Viereck $ABCD$ und beschreibt zwei Kreise, den einen durch A, den andern durch C, welche die Diagonale AC in einem und demselben Punkte T schneiden, und nennt man P, Q die Durchschnitte des erstern Kreises mit den Seiten DA, AB, und R, S die Durchschnitte des letztern mit BC, CD: so schneiden auch die Kreise QBR und SDP die Diagonale BD in einem und demselben Punkte U; und wenn man die Durchschnitte von DA mit BC und von AB mit CD, E und F nennt, so gehen auch die Kreise PER und QSF durch einen und denselben Punkt V der Diagonale EF.

Diese Figur besitzt aber noch die merkwürdige Eigenschaft,

> dass sich sämmtliche sechs durch A, B, C, D, E, F gelegten Kreise in einem und demselben Punkte Z schneiden, und dass die Bögen ZA, ZB, ... ZF dieser Kreise, alle von Z aus nach derselben Seite zu genommen, einander ähnlich sind.

Um dieses einzusehen, wollen wir uns sämmtliche sieben Linien der Figur, d. i. die Richtungen der Kräfte p, q, r, s und der Resultanten t, u, v um ihre Angriffspunkte P, Q, R, S, T, U, V nach einerlei Seite mit einerlei Winkelgeschwindigkeit sich zu

drehen anfangen lassen. Je zwei Kräfte und ihre Resultante, (wie p, q und t, oder q, r und u,) fahren dabei fort, sich in einem Punkte (A, oder B) zu schneiden; dieser Punkt rückt in dem durch die Angriffspunkte der beiden Kräfte und ihrer Resultante zu legenden Kreise (PQT, oder QRU) fort, und alle diese Durchschnittspunkte A, B, ... beschreiben, wegen der Gleichheit der Winkelgeschwindigkeiten von p, q, ..., in gleichen Zeiten ähnliche Bögen ihrer Kreise und kehren in demselben Zeitpunkte zu ihren anfänglichen Oertern zurück, um ihre Kreisbewegung von Neuem anzufangen.

Sey nun von den zwei Kreisen PQT und QRU (Fig. 38*), welche sich das einemal in Q schneiden, Z der zweite Durchschnittspunkt, und sey der Punkt A in seinem Kreise PQT bis Z gekommen. Weil A, Q, B immer in gerader Linie, in der Richtung der Kraft q, sind, so muss, wenn A in Z ist, der im Kreise QRU fortgehende Punkt B in der Geraden QZ, also entweder in Q oder Z seyn. Ist aber B in Q, so wird die Gerade BQ eine den Kreis QRU in Q Berührende, und A befindet sich daselbst, wo diese Tangente den Kreis PQT schneidet, also nicht in Z. Ist daher A nach Z gelangt, so muss auch B gleichzeitig in Z eingetroffen seyn. Alsdann schneiden sich folglich die Richtungen AP, AQ, RB, AT, UB der Kräfte p, q, r und ihrer Resultanten t, u, mithin auch die Richtungen von v und s, als den Resultanten von p, r und p, q, r, in einem Punkte Z. Nächst A und B müssen daher auch die übrigen Durchschnittspunkte C, D, E, F je zweier Kräfte und ihrer Resultante gleichzeitig in Z eintreffen. Sämmtliche sechs durch die anfänglichen Oerter von A, B, ... F gelegten Kreise schneiden sich folglich in einem und demselben Punkte Z, und die

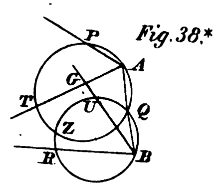


Fig. 38.*

Bögen derselben ZA, ZB, ... ZF müssen einander ähnlich seyn, indem sonst A, B, ... F nicht gleichzeitig in Z eintreffen könnten.

§. 117.

Zusätze. *a.* Während sich die Resultanten t und u um ihre Angriffspunkte T und U drehen, beschreibt ihr Durchschnittspunkt, welcher G heisse, einen durch T und U gehenden Kreis und trifft, wenn p, q, r, s in Z zusammenkommen, ebenfalls in Z ein. Es liegen daher T, U, G mit Z ebenfalls in einem Kreise, und es ist der Bogen ZG den Bögen ZA, ... ähnlich. Wir können hieraus den Schluss ziehen:

Werden in den drei Seiten BG, GA, AB eines Dreiecks ABG (oder in ihren Verlängerungen) nach Belieben drei Punkte U, T, Q genommen, so schneiden sich die drei Kreise ATQ, BQU, GUT in einem Punkte Z, und die Bögen ZA, ZB, ZG dieser Kreise sind einander ähnlich.

Auf gleiche Weise erhellet, dass, wenn AC, EF in H und BD, EF in I sich schneiden, die Punkte T, V, H sowohl, als U, V, I mit Z in einem Kreise liegen, und dass die Bögen ZH, ZI dieser Kreise einander und den Bögen ZA, ... ähnlich sind.

b. Da, wenn die Kräfte p, q, r, s, t, u, v um ihre Angriffspunkte P, ... V auf die gedachte Weise gedreht werden, die Winkel je zweier Kräfte mit einander sich nicht ändern, und da je drei Kräfte, wie p, q, t, welche sich anfangs in einem Punkte A schneiden, auch bei der Drehung damit fortfahren, so wird jedes der anfangs von den Kräften gebildeten Dreiecke sich ähnlich bleiben und die Anzahl dieser Dreiecke nicht geändert werden; mithin wird auch das System der Durch-

schnittspunkte A, B, ... G, H, I, also die ganze Figur, bei der Drehung sich ähnlich bleiben.

Mit dieser neuen Eigenschaft der Figur lässt sich die vorige, dass sämmtliche Kreise, welche die Punkte A, ... I beschreiben, sich in einem Punkte Z schneiden, auch folgendergestalt darthun. Da nämlich erwiesenermaassen die zwei Punkte A und B gleichzeitig in dem Durchschnitte Z ihrer Kreise eintreffen, und damit ihr gegenseitiger Abstand $=0$ wird, so müssen dann auch alle übrigen Punkte C, D, ... I in Z zusammenkommen, indem sie sonst eine Figur bildeten, welche der anfänglichen nicht ähnlich wäre.

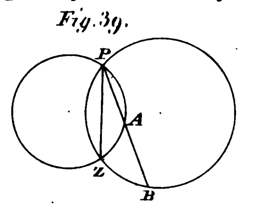
§. 118.

Die so eben aus statischen Betrachtungen erhaltenen geometrischen Sätze führen zu einer besondern Art von Reciprocität zwischen Punkten und Kreisen, woraus sich umgekehrt jene anfangs vielleicht überraschenden Sätze auf das natürlichste herleiten und so weit, als man will, verallgemeinern lassen.

Man habe eine beliebige Anzahl gegebener Punkte A, B, C, ... in einer Ebene. Jeder derselben werde mit noch einem andern gegebenen Punkt Z der Ebene durch einen Kreis von solcher Grösse verbunden, dass jeder der Bögen ZA, ZB, ZC, ..., wenn man ihn in seinem Kreise vom Mittelpunkte des letztern aus betrachtet und immer nach einer und derselben Seite zu rechnet, einen und denselben gegebenen Winkel $=2\alpha$ misst, und daher alle diese Bögen einander ähnlich sind. Die hiermit vollkommen bestimmte Figur besitzt nun folgende Eigenschaften:

1) Die zwei durch A und B gelegten Kreise mögen sich ausser in Z noch in P (Fig. 39.) schneiden, so

Fig. 39.



ist der Winkel $ZPA = ZPB = a$, und P, A, B, liegen folglich in gerader Linie; d. h. die durch zwei Punkte des Systems geführten Kreise schneiden sich in einem Punkte der jene zwei Punkte verbindenden Geraden.

2) Es werden daher auch, wenn drei Punkte A, B, C des Systems oder mehrere in einer Geraden liegen, die den Punkten zugehörigen Kreise sich in einem und demselben Punkte P dieser Geraden schneiden. Jeder Geraden AB kommt hiernach ein gewisser in ihr liegender Punkt P zu, den wir den festen Punkt der Geraden nennen wollen. Er wird gefunden als der Durchschnitt der Geraden AB mit einer zweiten ZP, welche, durch Z gelegt, mit der erstern den constanten Winkel a nach einerlei Seite zu macht.

3) Seyen AP, AQ, AR,... mehrere sich in demselben Punkte A schneidende Geraden und P, Q, R,... ihre festen Punkte. Der dem Punkte A zugehörige Kreis muss nun, da A in einer Geraden liegt, deren fester Punkt P ist, durch P gehen, und aus ähnlichem Grunde wird er auch die Punkte Q, R,... treffen. Schneiden sich daher zwei oder mehrere Gerade in einem Punkte A, so liegt dieser Punkt mit den festen Punkten der Geraden und dem Punkte Z in dem, dem Punkte A zugehörigen, Kreise; oder mit andern Worten: der einem Punkte zugehörige Kreis schneidet alle durch den Punkt gehenden Geraden in ihren festen Punkten.

4) Man lasse jetzt sämmtliche Punkte A, B, C,... des Systems in ihren Kreisen nach einerlei Seite sich gleichmässig fortbewegen, so dass jeder in derselben Zeit denselben Theil seines Kreises zurücklegt, und alle gleichzeitig in ihren anfänglichen Stellen wieder eintreffen. Weil ZA, ZB,... ähnliche Bögen sind,

so werden sie auch bei der Bewegung einander ähnlich bleiben, also gleichzeitig $=0$ werden, d. h. sämmtliche Punkte A, B, C, ... werden zu gleicher Zeit nach Z kommen.

Aus der Aehnlichkeit der Bögen ZA und ZB wurde in 1) der Durchgang der Geraden AB durch den Durchschnitt P der Kreise durch A und B geschlossen. Es wird daher auch bei der Bewegung die AB den Punkt P zu treffen fortfahren, d. h. die AB, und eben so jede andere zwei Punkte des Systems verbindende Gerade, wird sich um ihren festen Punkt drehen.

Hieraus folgt weiter, dass das Dreieck ZAB sich fortwährend ähnlich bleibt. Denn der Nebenwinkel von ZAB wird von dem Bogen $\frac{1}{2}PZ$ des Kreises durch A, und der Winkel ZBA von dem Bogen $\frac{1}{2}PZ$ des Kreises durch B gemessen. Auf gleiche Art bleibt auch jedes der Dreiecke ZBC, ZAC, etc. sich ähnlich. Mithin wird auch das ganze System des ruhenden Punktes Z und der sich bewegenden A, B, C, ... nur der Grösse, nicht der Form nach, sich ändern. Dieses System schwindet beim Eintreffen der A, B, ... in Z in einen Punkt zusammen und wird am grössten, wenn jeder der Punkte A, B, ... sich in seinem Kreise von Z um den Durchmesser des Kreises entfernt hat. Da alsdann die Mittelpunkte der Linien ZA, ZB, ... mit den Mittelpunkten der Kreise zusammenfallen, so folgt, dass auch das System der Mittelpunkte der Kreise eine dem System der Punkte A, B, ... ähnliche Figur bildet, und dass in beiden Z ein ähnlich liegender Punkt ist.

§. 119.

Bei der jetzt betrachteten Figur wurden die Punkte A, B, C, ..., so wie der Punkt Z und der Winkel 2α, beliebig angenommen und damit die Kreise durch

$A, B, C, \ldots$ construirt. Statt des Punktes Z und des Winkels 2α können wir aber auch zwei von den Kreisen, als zum Theil beliebig gegeben, setzen und daraus die übrigen zu bestimmen suchen.

Sey demnach in einer Ebene ein System von Punkten $A, B, C, D, E, \ldots$ (Fig. 40.) gegeben und werde

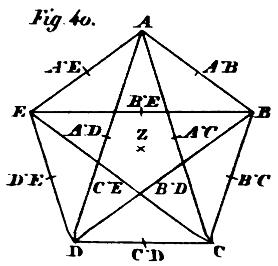
1) durch A willkührlich ein Kreis beschrieben, den man als den dem Punkte A zugehörigen betrachte. Er schneide die Geraden $AB, AC, AD, AE, \ldots$ in Punkten, die ich mit $A{\cdot}B, A{\cdot}C, A{\cdot}D, A{\cdot}E$ bezeichnen will, und welche die festen Punkte dieser Linien seyn werden. — Der durch B zu beschreibende Kreis muss ausserdem noch durch den Punkt $A{\cdot}B$ und den im Kreise durch A liegenden Punkt Z gehen. Man beschreibe daher

2) durch B und $A{\cdot}B$ willkührlich einen zweiten Kreis und nenne Z den Durchschnitt desselben mit dem Kreise durch A. Die Durchschnitte $B{\cdot}C, B{\cdot}D, B{\cdot}E, \ldots$ des Kreises durch B mit den Linien $BC, BD, BE, \ldots$ sind die festen Punkte dieser Linien.

3) Der Kreis für den Punkt C muss ausser C noch die schon erhaltenen Punkte $A{\cdot}C$, $B{\cdot}C$, Z treffen und ist hierdurch mehr als vollkommen bestimmt. Dies giebt, wie man leicht wahrnimmt, den schon in §. 117 a. gefundenen Satz. — Treffe der Kreis durch C die CD, $CE, \ldots$ in $C{\cdot}D, C{\cdot}E, \ldots$, als den festen Punkten dieser Linien, so liegen nunmehr

4) die fünf Punkte $D, A{\cdot}D, B{\cdot}D, C{\cdot}D, Z$ in einem Kreise, in dem, welcher dem Punkte D zugehört, und wir haben damit den in §. 116 vom Vierecke bemerkten Satz wiedergefunden. — Der Kreis durch D treffe die Linien $DE, \ldots$ in $D{\cdot}E, \ldots$, so müssen

5) die sechs Punkte $E, A{\cdot}E, B{\cdot}E, C{\cdot}E, D{\cdot}E, Z$, in einem Kreise liegen. Dies ist der Kreis für den



Punkt E, von dem man auf ähnliche Art zu den Kreisen der noch übrigen Punkte fortgeht. — Das damit gewonnene allgemeine Resultat kann etwa folgendergestalt ausgedrückt werden:

Hat man ein System von Punkten in einer Ebene, und verbindet sie paarweise durch gerade Linien, so kann man in jeder dieser Linien noch einen Punkt angeben, dergestalt, dass alle die letztern Punkte, welche in Linien liegen, die von einem und demselben Punkte des Systems ausgehen, mit diesem Punkte selbst immer in einem Kreise enthalten sind. Drei der Punkte, welche in Linien liegen, die nicht alle drei von demselben Punkte des Systems ausgehen, können willkührlich genommen werden. Alle die gedachten Kreise schneiden sich übrigens noch in einem Punkte, und die Bögen derselben von diesem Punkte bis zu den Punkten des Systems sind insgesammt einander ähnlich.

§. 120.

Bei der Construction, wodurch in §. 115. der Mittelpunkt eines Systems von Kräften in einer Ebene gefunden wurde, giebt es einige noch nicht erwähnte Beziehungen, welche uns, den Mittelpunkt noch auf eine andere Weise zu finden, in Stand setzen.

Seyen, wie in §. 115., PA, QA, TA (Fig. 37.) die Richtungen zweier Kräfte p, q und ihrer Resultante t; P, Q die Angriffspunkte der erstern und T der in der Resultante enthaltene Mittelpunkt. Weil T mit P, Q, A in einem Kreise liegt, so ist der Winkel $PAT = PQT$, $QAT = QPT$ und $PAQ =$ dem Nebenwinkel von PTQ. Construirt man daher ein Dreieck $P'Q'T'$, dessen Seiten $T'Q'$, $P'T'$, $P'Q'$ den Richtungen von p, q, t par-

allel sind, so wird dieses dem Dreiecke PQT ähnlich seyn, jedoch, wie die Figur zeigt, die umgekehrte Lage von PQT haben, so dass man das eine Dreieck nicht durch blosses Drehen in seiner Ebene, sondern erst noch einer halben Wendung um eine in der Ebene liegende Axe in eine solche Lage bringen kann, dass seine Seiten mit denen des andern parallel werden.

Sind folglich im Gegentheile die Angriffspunkte P und Q zweier Kräfte und das Dreieck $P'Q'T'$ gegeben, dessen Seiten $T'Q'$, $P'T'$ und $P'Q'$ den Richtungen der beiden Kräfte und ihrer Resultante parallel seyn sollen, so construire man, um den Mittelpunkt zu finden, über PQ ein dem $P'Q'T'$ ähnliches, aber umgekehrt liegendes Dreieck PQT, und es wird T der gesuchte Mittelpunkt seyn.

Hierbei verdient noch bemerkt zu werden, dass nach §. 28. *b.* die Seiten des Dreiecks $P'Q'T'$, und folglich auch des Dreiecks PQT, den Intensitäten von p, q, t proportional sind. Lassen wir daher noch auf T eine der Resultante t gleiche aber entgegengesetzte Kraft, also nach der Richtung AT, wirken, als wodurch ein bei der Drehung sich nicht aufhebendes Gleichgewicht entsteht, so haben wir folgenden durch seine Beziehungen zwischen den Stücken eines Dreiecks und den bestimmenden Stücken dreier Kräfte nicht uninteressanten Satz:

Sind die Ecken P, Q, T eines Dreiecks die Angriffspunkte dreier Kräfte p, q, t, sind die Winkel des Dreiecks den Supplementen der von den Richtungen der Kräfte mit einander gebildeten Winkel gleich, $P = 180^\circ - q\hat{}t$, etc. und sind die Seiten des Dreiecks den Intensitäten der Kräfte proportional, QT proportional mit p, etc. so herrscht Gleichgewicht.

Dass dieses Gleichgewicht durch Drehung nicht gestört wird, geht schon aus dem Satze selbst hervor, indem eine der drei Richtungen nach Willkühr genommen werden kann, und unabhängig von dieser Annahme die gegenseitigen Winkel der Richtungen bestimmt werden.

§. 121.

Wir wollen jetzt nach dieser zweiten Methode den Mittelpunkt von drei Kräften p, q, r zu bestimmen suchen. Seyen ad, ba, cb (Fig. 38.) parallel mit den Richtungen derselben. bd sey parallel mit der Resultante t von p und q; ca parallel mit der Resultante u von q und r. Alsdann ist, wie sich auch ohne das Parallelogramm der Kräfte erweisen lässt, cd parallel mit der Resultante von p, q, r, welche s heisse*). Seyen endlich P, Q, R die gegebenen Angriffspunkte von p, q, r.

*) Denn construirt man ein Viereck $ABCD$, dessen drei Seiten DA, AB, BC und zwei Diagonalen AC, BD, resp. den Seiten da, ba, bc und Diagonalen bd, ac des Vierecks $abcd$ parallel sind, und lässt man AD, AB, CB die Richtungen der Kräfte p, q, r vorstellen, so sind AC, DB die Richtungen der Resultanten t, u. Die Resultante s von p, q, r, d. i. von t, r oder von p, u, muss daher sowohl durch C, als durch D gehen, folglich in CD fallen. Heisst nun noch g der Durchschnitt von ac mit bd, und G der Durchschnitt von BD mit AC, so sind wegen des Parallelismus von DA mit da, u. s. w. die Dreiecke gda und GAD, gab und GBA, gbc und GCB paarweise einander ähnlich, und es verhält sich daher

$$gd : ga = GA : GD,$$
$$ga : gb = GB : GA,$$
$$gb : gc = GC : GB,$$
$$\text{folglich } gd : gc = GC : GD.$$

Mithin sind auch die Dreiecke gcd und GDC einander ähnlich, und cd ist mit DC, d. i. mit der Richtung von s, parallel. — Uebrigens ist der jetzt geometrisch erwiesene Parallelismus von cd mit DC, unter denselben Voraussetzungen, wie hier, bereits in §. 29. durch Statik dargethan worden.

Man construire nun über PQ ein dem Dreiecke bda, d. i. dem Dreiecke der Richtungen von p, q, t ähnliches Dreieck PQT, indem man die Spitze T auf derjenigen Seite von PQ nimmt, wodurch PQT die umgekehrte Lage des Dreiecks pqt erhält. Eben so mache man über RT das Dreieck RTS dem Dreiecke rts in umgekehrter Lage ähnlich, und man hat damit S, als den Mittelpunkt von p, q, r gefunden.

Oder man verzeichne über QR das dem Dreiecke qru ähnliche und umgekehrt liegende Dreieck QRU und über PU das dem Dreiecke pus ähnliche und umgekehrt liegende Dreieck PUS.

Da sich auf beide Arten derselbe Punkt S ergeben muss, so hat man folgenden Satz:

Sind p, q, r, s die aufeinander folgenden Seiten eines ebenen Vierecks, t die durch den Durchschnitt von p mit s und den von q mit r gehende Diagonale, u die andere Diagonale, so kann man zu drei beliebig genommenen Punkten P, Q, R drei andere S, T, U in derselben Ebene hinzufügen, dergestalt, dass die vier Dreiecke PQT, QRU, RST, SPU den Dreiecken pqt, qru, rst, spu der erstern Figur ähnlich sind.

Sämmtliche Dreiecke PQT, etc. können hierbei übrigens die umgekehrte Lage der Dreiecke pqt, etc. haben, wie vorhin, oder auch die directe, indem man nur die Ebene der einen Figur von der entgegengesetzten Seite zu betrachten braucht, um die eine Lage sogleich in die andere zu verwandeln.

Auf dieselbe Weise kann man nun auch bei einem Systeme von noch mehreren Kräften verfahren, und damit folgenden allgemeinen Satz gewinnen:

Hat man ein System von m Punkten in einer Ebene und verbindet je zwei derselben durch eine Gerade, so kann man in einer Ebene jeder dieser $\frac{1}{2}m(m-1)$ Geraden einen Punkt entsprechen lassen, dergestalt, dass jedem der $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ Dreiecke, welches drei der m erstern Punkte zu Ecken hat, das Dreieck ähnlich ist, dessen Ecken die den Seiten des erstern Dreiecks entsprechenden Punkte sind. Dabei können von den $\frac{1}{2}m(m-1)$ Punkten irgend $m-1$, von deren entsprechenden Linien keine drei oder mehrere ein geschlossenes Vieleck bilden, nach Willkühr bestimmt werden.

Die übrigen $\frac{1}{2}m(m-1)-(m-1)=\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ Punkte werden durch Construction eben so vieler Dreiecke gefunden, die den entsprechenden Dreiecken in dem Systeme der m Punkte ähnlich sind. Zufolge des Satzes müssen dann auch die übrigen $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)-\frac{1}{2}(m-1)(m-2)=\frac{1}{6}(m-1)(m-2)(m-3)$ Dreiecke der einen Figur den entsprechenden Dreiecken in der andern ähnlich seyn.

§. 122.

Nachdem wir in dem Bisherigen von Kräften, die nach beliebigen Richtungen in einer Ebene wirken, den Mittelpunkt durch Construction zu finden gelernt haben, wollen wir diesen Punkt noch durch Rechnung zu bestimmen suchen, wobei sich uns zugleich einige andere für die Folge wichtige Bemerkungen darbieten werden.

Seyen, in Bezug auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem, (X, Y), (X', Y'), etc. mehrere Kräfte in einer Ebene, die sich das Gleichgewicht halten; (x, y), (x', y'), etc. die Angriffspunkte der Kräfte. Alsdann ist wegen des Gleichgewichts (§. 38.):

$$1)\ \Sigma X = 0,\quad 2)\ \Sigma Y = 0,\quad 3)\ \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Indem nun die Kräfte mit parallel bleibenden Richtungen und unveränderten Intensitäten auf dieselben Punkte des Körpers zu wirken fortfahren, werde der Körper verrückt, jedoch so, dass die Ebene der Kräfte nicht aus ihrer Lage komme. Durch diese Verrückung seyen in Bezug auf das vorige Coordinatensystem, welches an der Bewegung nicht Theil genommen habe, die Coordinaten der Angriffspunkte resp. in $x_1, y_1; x'_1, y'_1;$ etc. übergegangen. Soll daher auch jetzt noch Gleichgewicht herrschen, so muss zu den vorigen drei Gleichungen noch die vierte

$$\Sigma(x_1 Y - y_1 X) = 0$$

hinzukommen.

Es ist aber, wenn der Punkt des Körpers, welcher anfänglich mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfiel, nachher die Coordinaten a, b erhält, und wenn die Linie des Körpers, welche anfangs mit der Axe der x coincidirte, nach der Verrückung einen Winkel $= \alpha$ mit derselben macht:

$$x_1 = a + x \cos\alpha - y \sin\alpha,$$
$$y_1 = b + x \sin\alpha + y \cos\alpha,$$

u. s. w. Mit diesen Werthen von $x_1, y_1, \ldots$ wird

$$\Sigma(x_1 Y - y_1 X) = a\Sigma Y - b\Sigma X + \cos\alpha\, \Sigma(xY - yX)$$
$$- \sin\alpha\, \Sigma(xX + yY),$$

oder mit Anwendung der Abkürzungen A, B, N (§. 37.), und wenn wir

$$\Sigma(xX + yY) = k$$

setzen: ... $\Sigma(x_1 Y - y_1 X) = aA - bB + N\cos\alpha - k\sin\alpha$

$$= -k\sin\alpha,$$

wegen 1), 2) und 3); und es ist demnach

$$4)\ k = 0$$

die Bedingungsgleichung für die Fortdauer des Gleichgewichts.

§. 123.

Zusätze. *a.* Durch a, b und α wird die Verrückung des Körpers, wie sie jetzt angenommen worden, vollkommen bestimmt. Sie kann hiernach als zusammengesetzt betrachtet werden aus einer mit der Ebene der x, y parallelen Fortbewegung, welche durch a, b gegeben ist, und aus einer durch α gegebenen Drehung um eine auf dieser Ebene normale Axe.

b. So wie $\Sigma(xY - yX)$ das anfängliche Moment des Systems in Bezug auf den Anfangspunkt der Coordinaten ist, so ist $\Sigma(x_{,}Y - y_{,}X)$ das Moment in Bezug auf denselben Punkt nach der Verrückung. Beim anfänglichen Gleichgewicht ist ersteres Moment $=0$, und unter derselben Voraussetzung das letztere $= -h\sin\alpha$, also nur abhängig von dem Winkel, um welchen der Körper gedreht worden, und unabhängig von der durch a, b bestimmten parallelen Fortbewegung. Es ist daher auch unabhängig von der Axe der Drehung, wenn diese nur auf der Ebene der x, y senkrecht steht.

c. Weil sowohl anfangs, als bei der nachherigen Drehung, A und B null sind, so wird das System, welches anfangs im Gleichgewichte ist, bei der Drehung mit einem Paare gleichwirkend (§. 39.). Das Moment des Systems, $-h\sin\alpha$, ist daher eben so, wie das Moment eines Paares, für alle Punkte der Ebene von gleicher Grösse (§. 31.).

d. Das Moment nach der Drehung ist dem Sinus des Drehungswinkels α proportional und erreicht daher nach einer Drehung um 90° oder 270° seinen grössten Werth, welcher $= \mp h$ ist. Dagegen ist es $=0$ und

das Gleichgewicht besteht noch, wenn $\alpha =$ einem Vielfachen von 180°, und daher der Körper seiner anfänglichen Lage parallel ist, oder halb um sich herum gedreht worden ist. (Vergl. §. 5. *b*.)

Dass $-k$ der Werth des Moments nach einer Drehung um 90° ist, folgt übrigens auch unmittelbar daraus, dass durch eine solche Drehung des Systems um den Anfangspunkt der Coordinaten, x in $-y$ und y in x, folglich $xY-yX$ in $-(xX+yY)$ übergeht.

§. 124.

Ist in der Ebene, worin die Kräfte (X, Y), (X', Y'),... wirken, noch ein zweites System von Kräften befindlich, die sich bei der anfänglichen Lage des Körpers ebenfalls das Gleichgewicht halten, und ist nach einer Drehung um 90° das Moment dieses zweiten Systems eben so gross, als das des ersten, $=-k$, so ist es nach einer Drehung um α, $=-k \sin \alpha$, folglich stets mit dem ersten gleichwirkend.

Bestehe das zweite System nur aus zwei Kräften P_1 und P_2, $=-P_1$, deren Angriffspunkte A_1 und A_2 seyen. Das Coordinatensystem, dessen Lage willkührlich ist, wollen wir so annehmen, dass beim anfänglichen Gleichgewichte der Punkt A_1 in den Anfangspunkt der Coordinaten und die Gerade A_1A_2 in die Axe der x fällt. Alsdann ist für den Punkt A_2, $x=A_1A_2$, $y=0$, und für die Kraft P_2, $X=P_2$, $Y=0$; folglich $k=xX=A_1A_2.P_2$, wo die Richtung von P_2 und die anfängliche von A_1A_2 einerlei oder einander entgegengesetzt seyn müssen, nachdem k positiv oder negativ ist.

Hat man daher für ein System von Kräften in einer Ebene, die im Gleichgewichte sind, das Moment k berechnet, und bringt man an zwei willkührlich in der

Ebene genommenen Punkten A_1 und A_2 zwei einander direct entgegengesetzte Kräfte P_1 und P_2 an, deren jede $=\frac{h}{A_1A_2}$ ist, und von welchen P_2 auf A_2 nach der Richtung A_1A_2 oder A_2A_1 wirkt, nachdem h das positive oder negative Zeichen hat, so dass mithin beide Kräfte bei einem positiven h ihre Angriffspunkte von einander zu entfernen, bei einem negativen einander zu nähern streben: so werden bei der Drehung das Paar, in welches diese zwei Kräfte übergehen, und das erstere System selbst immer gleiche Wirkung haben. Mit andern Worten:

Ein System von Kräften in einer Ebene, welche sich das Gleichgewicht halten, wird bei Drehung der Ebene in sich selbst gleichwirkend mit einem Paare, dessen Kräfte eben so, wie die des Systems mit parallel bleibenden Richtungen und unveränderter Stärke fortwährend auf dieselben zwei Punkte der Ebene wirkend sich annehmen lassen. Die zwei Punkte selbst, oder auch der eine Punkt und die auf ihn gerichtete Kraft, können dabei willkührlich bestimmt werden.

Ist das System anfänglich nicht im Gleichgewichte, sondern auf ein Paar reducirbar, werden also von den Gleichungen 1), 2), 3) nur die beiden ersten erfüllt, so wird

$$\Sigma(x,Y-y,X)=N\cos\alpha-h\sin\alpha,$$

folglich wenn wir $\Sigma(x,Y-y,X)=0$ setzen:

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{N}{h},$$

d. h. das Moment des Systems verschwindet nach einer Drehung, deren Winkel α durch letztere Gleichung

bestimmt ist und somit zwei um 180° verschiedene Werthe hat.

Ist demnach ein System von Kräften in einer Ebene mit einem Paare gleichwirkend, so giebt es bei Drehung der Ebene in sich selbst zwei einander entgegengesetzte Lagen, in denen Gleichgewicht stattfindet. Ein System dieser Art muss daher eben so, wie das vorige, bei der Drehung mit einem Paare gleichwirkend seyn, dessen Kräfte auf zwei willkührlich zu nehmende Punkte der Ebene nach parallel bleibenden Richtungen wirken.

§. 125.

Wenn endlich das in einer Ebene enthaltene System durch eine einzelne Kraft (X_1, Y_1) ins Gleichgewicht gebracht werden kann, so lässt sich der Angriffspunkt (x_1, y_1) dieser Kraft in ihrer Richtung immer so bestimmen, dass auch bei der Drehung das Gleichgewicht fortdauert. Man hat nämlich, wenn zu den Kräften des Systems noch die Kraft (X_1, Y_1) hinzugefügt wird, zufolge der vier Gleichungen 1) .. 4) (§. 122.), welche das bei der Drehung fortdauernde Gleichgewicht bedingen:

$$X_1 + A = 0, \quad x_1 Y_1 - y_1 X_1 + N = 0,$$
$$Y_1 + B = 0, \quad x_1 X_1 + y_1 Y_1 + h = 0.$$

Hieraus fliesst nach Elimination von X_1 und Y_1:

$$Bx_1 - Ay_1 = N, \quad Ax_1 + By_1 = h,$$

und hieraus weiter:

$$x_1 = \frac{Ah + BN}{A^2 + B^2}, \quad y_1 = \frac{Bh - AN}{A^2 + B^2}.$$

Ein auf eine einzelne Kraft ($-X_1$, $-Y_1$) reducirbares System bleibt daher auch bei der Drehung mit dieser Kraft gleichwirkend, und die Richtung derselben trifft fortwährend den durch die eben gefundenen Coor-

dinaten x_1, y_1 bestimmten Punkt der Ebene, — den Mittelpunkt des Systems.

Für den besondern Fall, wenn die Kräfte einander parallele Richtungen haben, und φ den Winkel bezeichnet, unter dem diese Richtungen gegen die Axe der x geneigt sind, $P, P', \ldots$ aber die Intensitäten der Kräfte ausdrücken, hat man:

$$A = \cos\varphi\, \Sigma P,\quad N = \sin\varphi\, \Sigma x P - \cos\varphi\, \Sigma y P,$$
$$B = \sin\varphi\, \Sigma P,\quad h = \cos\varphi\, \Sigma x P + \sin\varphi\, \Sigma y P.$$

Substituirt man diese Werthe in den obigen Ausdrücken für x_1 und y_1, so ergeben sich nach leichter Reduction:

$$x_1 = \frac{\Sigma x P}{\Sigma P},\quad y_1 = \frac{\Sigma y P}{\Sigma P},$$

die schon in §. 108. gefundenen Werthe für die Coordinaten des Mittelpunkts paralleler Kräfte.

Achtes Kapitel.

Von den Axen des Gleichgewichts.

§. 126.

Die Untersuchungen, welche wir im vorigen Kapitel über Systeme von parallelen Kräften, so wie von Kräften, die in einer Ebene wirken, angestellt haben, wollen wir jetzt auf Systeme von Kräften im Raume überhaupt ausdehnen und uns deshalb zunächst folgende Frage vorlegen:

Auf einen frei beweglichen festen Körper wirken Kräfte nach beliebigen Richtungen und halten einander das Gleichgewicht. Unter welchen Bedingungen wird

dieses Gleichgewicht bei Aenderung der Lage des Körpers fortdauern, wenn die Kräfte auf die anfänglichen Angriffspunkte parallel mit ihren anfänglichen Richtungen zu wirken fortfahren?

Die in den nächsten §§. zu gebende Beantwortung dieser Frage wird die Grundlage aller übrigen hierher gehörigen Untersuchungen bilden.

§. 127.

In Bezug auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem, dessen Axen eine unveränderliche Lage im Raume haben, seyen (X, Y, Z), (X', Y', Z'), ... die auf den Körper wirkenden Kräfte und (x, y, z), (x', y', z'), ... die Angriffspunkte derselben vor der Verrückung des Körpers. Alsdann ist, weil sich die Kräfte das Gleichgewicht halten sollen (§. 66.):

$$(1)\begin{cases}\Sigma X=0,\\ \Sigma Y=0,\\ \Sigma Z=0,\end{cases}\quad (2)\begin{cases}\Sigma(yZ-zY)=0,\\ \Sigma(zX-xZ)=0,\\ \Sigma(xY-yX)=0.\end{cases}$$

Man denke sich noch ein zweites System dreier sich rechtwinklich schneidender Coordinatenaxen, welches mit dem beweglichen Körper fest verbunden ist, und für welches daher die Coordinaten der Angriffspunkte bei der Bewegung des Körpers ungeändert bleiben. Dieses zweite System falle anfangs mit dem ersten Systeme zusammen, so dass die Coordinaten der Angriffspunkte in beiden Systemen anfangs sich gleich sind. Die nachherige Verrückung des Körpers wird nun vollkommen bestimmt seyn, wenn wir die dadurch erfolgte Aenderung der Lage des zweiten Systems gegen das erste angeben.

Sey daher nach der Verrückung (a, b, c) der Anfangspunkt des zweiten Systems in Bezug auf das erste;

seyen ferner die Cosinus der Winkel, welche mit den Axen der x, y, z im ersten Systeme

die Axe der x im zweiten macht, $= \alpha, \beta, \gamma,$
- - - y - - - $= \alpha', \beta', \gamma',$
- - - z - - - $= \alpha'', \beta'', \gamma''.$

Alsdann ist, wenn wir noch die für das erste System veränderten Coordinaten der Angriffspunkte mit $x_{,}, y_{,}, z_{,}; x'_{,}, y'_{,}, z'_{,};$ etc. bezeichnen:

$$x_{,} = a + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z,$$
$$y_{,} = b + \beta x + \beta' y + \beta'' z,$$
$$z_{,} = c + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z,$$
$$x'_{,} = a + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z',$$
u. s. w. u. s. w.

Da nun auch nach der Verrückung zwischen den sich parallel gebliebenen Kräften Gleichgewicht noch herrschen soll, so müssen nächst den obigen sechs Gleichungen (1) und (2) noch folgende drei

$$(3) \begin{cases} \Sigma (y_{,} Z - z_{,} Y) = 0, \\ \Sigma (z_{,} X - x_{,} Z) = 0, \\ \Sigma (x_{,} Y - y_{,} X) = 0, \end{cases}$$ erfüllt werden.

Es wird aber, wenn man für $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ ihre durch x, y, z ausgedrückten Werthe substituirt:

$$y_{,} Z - z_{,} Y = b Z + \beta x Z + \beta' y Z + \beta'' z Z$$
$$- c Y - \gamma x Y - \gamma' y Y - \gamma'' z Y.$$

Setzt man daher noch der Kürze willen und mit Rücksicht auf (2):

$$(4) \begin{cases} \Sigma y Z = \Sigma z Y = F, & \Sigma x X = l, \\ \Sigma z X = \Sigma x Z = G, & \Sigma y Y = m, \\ \Sigma x Y = \Sigma y X = H, & \Sigma z Z = n, \end{cases}$$

und erwägt, dass nach (1) $\Sigma X = 0$, etc., so verwandelt sich die erste der Gleichungen (3) in:

$$(5)\begin{cases}(\beta'-\gamma'')\,F+\beta G-\gamma H-\gamma' m+\beta'' n=0; \\ \qquad\text{und eben so folgen} \\ (\gamma''-\alpha)\,G+\gamma' H-\alpha' F-\alpha'' n+\gamma l=0, \\ (\alpha-\beta')\,H+\alpha'' F-\beta'' G-\beta l+\alpha' m=0\end{cases}$$

aus den beiden andern Gleichungen (3).

An die Stelle dieser mit (3) identischen Gleichungen (5) lassen sich aber drei aus ihnen fliessende ungleich einfachere setzen. Zu dem Ende erinnere man sich zuerst der bekannten Relationen:

$$(A)\begin{cases}\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0, \\ \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma=0, \\ \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,\end{cases}\quad (B)\begin{cases}\beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0, \\ \gamma\alpha+\gamma'\alpha'+\gamma''\alpha''=0, \\ \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0,\end{cases}$$

$$(C)\begin{cases}\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1, & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \\ \beta^2+\beta'^2+\beta''^2=1, & \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1, \\ \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1, & \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1,\end{cases}$$

und der aus ihnen sich ergebenden:

$$(D)\begin{cases}\beta'\gamma''-\beta''\gamma'=\alpha, & \gamma'\alpha''-\gamma''\alpha'=\beta, & \alpha'\beta''-\alpha''\beta'=\gamma, \\ \beta''\gamma-\beta\gamma''=\alpha', & \gamma''\alpha-\gamma\alpha''=\beta', & \alpha''\beta-\alpha\beta''=\gamma', \\ \beta\gamma'-\beta'\gamma=\alpha'', & \gamma\alpha'-\gamma'\alpha=\beta'', & \alpha\beta'-\alpha'\beta=\gamma'',\end{cases}$$ *),

---

*) Um letztere weniger oft vorkommende Relationen (*D*) aus den vorhergehenden abzuleiten, denke man sich in den (*D*) auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens statt $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots$ einstweilen $a, b, c, a', \ldots,$ als abkürzende Bezeichnungen von $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$, etc. geschrieben. Der dann noch zu führende Beweis, dass $a=\alpha$, $b=\beta, \ldots$ $c''=\gamma''$, ist folgender.

Aus der zweiten und dritten der Gleichungen (*A*) fliesst:

$$\alpha:\beta:\gamma=\beta'\gamma''-\beta''\gamma' : \gamma'\alpha''-\gamma''\alpha' : \alpha'\beta''-\alpha''\beta'$$
$$\text{d. i.} = a : b : c,$$

eben so aus der zweiten und dritten der Gleichungen (*B*):

$$\alpha : \alpha' : \alpha'' = a : a' : a'';$$

und man sieht leicht, indem man auf gleiche Art auch die übrigen Verbindungen zweier Gleichungen in (*A*) und in (*B*) in Rechnung zieht, dass überhaupt die neun Grössen $a, b, \ldots c''$ den neun Cosinussen $\alpha, \beta, \ldots \gamma''$ proportional sind. Man setze daher

$$a=m\alpha,\ b=m\beta,\ \ldots\ c''=m\gamma'',$$

Nun folgt aus den zwei letzten der Gleichungen (5), wenn man aus ihnen l wegschafft, sie deshalb resp. mit β und γ multiplicirt und hierauf addirt, mit Anwendung der Relationen (D):

$$(\alpha''\gamma-\alpha'\beta)F-(\alpha\beta+\alpha')G+(\alpha\gamma+\alpha'')H+\alpha'\gamma m-\alpha''\beta n=0.$$

Hierin ist vermöge (D) der Coefficient von F,

$$=\gamma''\alpha-\beta'-\alpha\beta'+\gamma''=(1+\alpha)(\gamma''-\beta').$$

Multiplicirt man daher noch die erste der Gleichungen (5) mit $1+\alpha$ und addirt sie zu der letztgefundenen, so geht F heraus, und man bekommt nach gehöriger Reduction mittelst (D):

---

wo m eine für alle diese Gleichungen unveränderliche Zahl ist. Um sie zu bestimmen, nehme man etwa die drei letzten Gleichungen von (D):

$$\beta\gamma'-\beta'\gamma=m\alpha'',\quad \gamma\alpha'-\gamma'\alpha=m\beta'',\quad \alpha\beta'-\alpha'\beta=m\gamma'',$$

und addire ihre Quadrate, so kommt nach leichter Transformation:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2=m^2(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2),$$

eine Gleichung, die sich vermöge der Gleichungen (C) und der dritten von (A) auf

$$1=m^2$$

reducirt; folglich entweder immer $m=+1$, oder immer $m=-1$.

Ueber die Wahl zwischen diesen beiden Werthen von m entscheidet der Umstand, dass die zwei Axensysteme, deren gegenseitige Lage durch $\alpha, \beta, \ldots \gamma''$ bestimmt wird, anfangs zusammenfallen sollen, die positiven Axen der x, y, z des einen mit den gleichnamigen positiven Axen des andern. Bei dem Zusammenfallen beider Systeme ist aber offenbar $\alpha=\beta'=\gamma''=1$, und jeder der sechs übrigen Cosinusse $=0$. Substituirt man diese Werthe von $\alpha, \ldots \gamma''$ in die erste der Gleichungen (D): $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'=m\alpha$, so erhält man $m=+1$. Die Gleichungen (D), wie sie oben geschrieben sind, haben daher ihre Richtigkeit.

Hätte das eine Axensystem gegen das andere eine solche Lage, dass sie beide nicht zur Coincidenz gebracht werden könnten, sondern dass, wenn z. B. die positiven Axen der x und y des einen in die positiven Axen der x und y des andern fielen, die positiven Axen der z einander entgegengesetzt wären, so würde man, wie sich auf gleiche Art zeigen lässt, $m=-1$ zu nehmen haben.

$$(\beta-\alpha')G+(\alpha''-\gamma)H+(\beta''-\gamma')(m+n)=0;$$

und eben so findet sich

$$(\gamma'-\beta'')H+(\beta-\alpha')F+(\gamma-\alpha'')(n+l)=0,$$

$$(\alpha''-\gamma)F+(\gamma'-\beta'')G+(\alpha'-\beta)(l+m)=0,$$

nachdem man die Gleichungen (5) das einemal mit α', $1+\beta'$, γ', das anderemal mit α'', β'', $1+\gamma''$ multiplicirt und sie hierauf beidemale addirt hat.

Man setze nun noch zur Abkürzung:

$$(6)\quad \gamma'-\beta''=\varphi\tau,\ \alpha''-\gamma=\chi\tau,\ \beta-\alpha'=\psi\tau;$$

$$(7)\ \begin{cases} m+n=\Sigma(yY+zZ)=f, \\ n+l=\Sigma(zZ+xX)=g, \\ l+m=\Sigma(xX+yY)=h, \end{cases}$$

so werden die eben erhaltenen drei Gleichungen

$$(8)\ \begin{cases} \psi G+\chi H=\varphi f, \\ \varphi H+\psi F=\chi g, \\ \chi F+\varphi G=\psi h. \end{cases}$$

Dies sind demnach die Gleichungen, welche die Stelle von (5) oder (3) vertreten können, also die Bedingungen, unter denen auch nach der Verrückung des Körpers Gleichgewicht noch statt findet. In ihnen sind F, G, H, f, g, h nach (4) und (7) durch die Richtungen und Intensitäten der sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte und durch die anfänglichen Coordinaten ihrer Angriffspunkte gegeben; die Verhältnisse zwischen φ, χ, ψ aber sind nach (6) durch die Lage des Körpers nach der Verrückung gegen seine anfängliche Lage bestimmt.

§. 128.

Die Verhältnissgrössen φ, χ, ψ haben hier eine noch besonders merkwürdige Bedeutung. Addirt man nämlich die Gleichungen (6), nachdem man sie vorher resp. mit α, β, γ multiplicirt hat, so kommt mit abermaliger Anwendung von (D):

$\alpha\varphi\tau + \beta\chi\tau + \gamma\psi\tau = \gamma' - \beta'' = \varphi\tau$, d. i.

$$(9)\quad \begin{cases} \alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi = \varphi, \text{ und ähnlicherweise} \\ \alpha'\varphi + \beta'\chi + \gamma'\psi = \chi, \\ \alpha''\varphi + \beta''\chi + \gamma''\psi = \psi. \end{cases}$$

Man bestimme nun die in (6) bis jetzt beliebig zu nehmende Grösse τ so, dass

$$(10)\quad \tau^2 = (\gamma' - \beta'')^2 + (\alpha'' - \gamma)^2 + (\beta - \alpha')^2.$$

Hierdurch wird

$$(11)\quad \varphi^2 + \chi^2 + \psi^2 = 1,$$

und man kann nunmehr φ, χ, ψ als die Cosinus dreier Winkel betrachten, welche eine Gerade p mit den drei Axen des ersten Coordinatensystems macht. Weil α, β, γ die Cosinus der Winkel der Axe der x des zweiten Systems mit den drei Axen des ersten sind, so ist $\alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi$ der Cosinus des Winkels, den die Gerade p mit der Axe der x des zweiten Systems macht. Dieser Cosinus ist aber zufolge der ersten Gleichung in (9), $= \varphi$; d. h. die Gerade p macht mit der Axe der x des zweiten Systems denselben Winkel, als mit der Axe der x des ersten. Auf gleiche Art erkennt man aus der zweiten der Gleichungen (9), dass p mit den Axen der y, und aus der dritten, dass p mit den Axen der z beider Systeme einerlei Winkel macht.

Nimmt man daher an, dass beide Systeme einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt haben, so giebt es immer eine durch denselben gehende, durch φ, χ, ψ bestimmte Gerade p, welche gegen beide Systeme einerlei Lage hat.*)

*) Der Entdecker dieses merkwürdigen Satzes ist Euler. Siehe dessen Abhandlung: *Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum in Nov. Comment. Petrop. Tom.* XX., wo der Satz sehr einfach durch eine geometrische Construction bewiesen ist.

§. 129.

Man denke sich um den gemeinschaftlichen Anfangspunkt beider Systeme mit einem beliebigen Halbmesser eine Kugelfläche beschrieben. Werde diese von den Axen der x, y, z des ersten und zweiten Systems resp. in $A_,$, $B_,$, $C_,$ und A, B, C, und von p in P (Fig. 41.) getroffen, so sind zu Folge des Erwiesenen die Bögen $PA_, = PA$, $PB_, = PB$, $PC_, = PC$, und daher die sphärischen Dreiecke $B_,PC_,$, $C_,PA_,$, $A_,PB_,$ resp. gleich und ähnlich den Dreiecken BPC, CPA, APB. Hieraus folgt leicht weiter, dass die drei Winkel $A_,PA$, $B_,PB$, $C_,PC$ einander gleich sind, und dass mithin das eine System durch blosse Drehung um die Gerade p um einen Winkel $= A_,PA =$ etc. mit dem andern zur Deckung gebracht werden kann.

Die Grösse dieses Winkels muss sich ebenfalls durch $\alpha, \ldots \gamma''$ ausdrücken lassen. In der That hat man in dem sphärischen Dreiecke $A_,PA$:

$$\cos A_,A = \cos PA_, \cos PA + \sin PA_, \sin PA \cos A_,PA,$$

mithin, weil $\cos A_,A = \alpha$, $\cos PA_, = \cos PA = \varphi$, und wenn man den Cosinus von $A_,PA =$ etc. mit σ bezeichnet:

$$(12) \quad \alpha = \varphi^2 + (1 - \varphi^2)\,\sigma,$$

worin man nur noch, mittelst (6) und (10), φ durch $\alpha, \ldots \gamma''$ auszudrücken hat. Um aber einen symmetrischen Ausdruck für σ zu erhalten, entwickle man seinen Werth auf gleiche Weise durch Betrachtung der Dreiecke $B_,PB$, $C_,PC$, und es kommt:

$$(12) \quad \begin{cases} \beta' = \chi^2 + (1 - \chi^2)\,\sigma, \\ \gamma'' = \psi^2 + (1 - \psi^2)\,\sigma; \end{cases}$$

mithin wenn man diese zwei Gleichungen zu der vorigen addirt, und mit Berücksichtigung von (11):

$$(13) \quad \alpha + \beta' + \gamma'' = 1 + 2\sigma.$$

Fig. 41.

C, C P B A, B, A

— Der Werth von σ hängt auf eine sehr einfache Weise mit der Hülfsgrösse τ zusammen. Es ist nämlich zufolge der Gleichungen (C):

$$\gamma'^2 + \beta''^2 = 1 + \alpha^2 - \beta'^2 - \gamma''^2,$$

und nach (D): $-2\gamma'\beta'' = 2\alpha - 2\beta'\gamma''$.

Hiermit wird:

$$(\gamma' - \beta'')^2 = (1 + \alpha + \beta' + \gamma'')(1 + \alpha - \beta' - \gamma'')$$
$$= 4(1+\sigma)(\alpha - \sigma), \text{ und eben so}$$
$$(\alpha'' - \gamma)^2 = 4(1+\sigma)(\beta' - \sigma),$$
$$(\beta - \alpha')^2 = 4(1+\sigma)(\gamma'' - \sigma);$$

folglich nach (10) und (13):

$$(14) \quad \tau^2 = 4(1+\sigma)(1-\sigma) = 4 \sin A_{\prime}PA^2.$$

So wie daher φ, χ, ψ die Cosinus der Winkel der Drehungsaxe mit den Axen der Coordinaten sind, so ist $\frac{1}{2}\tau$ der Sinus des Winkels selbst, um welchen das System gedreht worden.*)

§. 130.

Um den Körper aus seiner anfänglichen in die nachherige durch a, b, c $\alpha, \beta, \ldots \gamma''$ bestimmte Lage zu

---

*) Mittelst der 9 Gleichungen (6), (9) und (12) lassen sich umgekehrt sämmtliche neun zur gegenseitigen Verwandlung der Coordinaten dienende Cosinus $\alpha, \ldots \gamma''$ durch σ oder $\tau = 2\sqrt{1-\sigma^2}$ und φ, χ, ψ ausdrücken. Die Werthe von α, β', γ'' geben die Gleichungen (12) unmittelbar. Die Werthe der übrigen finden sich nach leichter Rechnung:

$$\beta'' = (1-\sigma)\chi\psi - \tfrac{1}{2}\tau\varphi, \quad \gamma' = (1-\sigma)\chi\psi + \tfrac{1}{2}\tau\varphi,$$
$$\gamma = (1-\sigma)\psi\varphi - \tfrac{1}{2}\tau\chi, \quad \alpha'' = (1-\sigma)\psi\varphi + \tfrac{1}{2}\tau\chi,$$
$$\alpha' = (1-\sigma)\varphi\chi - \tfrac{1}{2}\tau\psi, \quad \beta = (1-\sigma)\varphi\chi + \tfrac{1}{2}\tau\psi.$$

Diese Formeln sind gleichfalls von Euler gefunden worden. *Nov. Comment. Petrop. Tom.* XX. *Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi.* §. 22. Vergl. Crelle's Journal II. Band II. Heft, S. 188: *Euleri formulae de transformatione coordinatorum* von Jacobi; dasselbe Journ. VIII. Bd. II. Heft S. 153: Grunert *über die Verwandlung der Coordinaten im Raume.*

bringen, kann man auch so verfahren, dass man ihn zuerst parallel mit sich fortbewegt, bis in Bezug auf das erste im Raume unveränderliche Coordinatensystem der im Anfangspunkte desselben befindliche Punkt des Körpers nach (a, b, c) kommt, und dass man zweitens den Körper um diesen Punkt dreht, bis die Coordinatenaxen die durch $\alpha, \beta, \ldots \gamma''$ bestimmten Richtungen erhalten. Dieses letztere aber lässt sich, wie wir so eben gesehen haben, immer dadurch bewerkstelligen, dass man den Körper um eine durch den Punkt gehende, durch φ, χ, ψ ihrer Richtung nach bestimmte, Axe um einen Winkel dreht, dessen Sinus $\pm \frac{1}{2}\tau$ ist. Jede Verrückung eines Körpers kann daher als zusammengesetzt aus einer parallelen Fortbewegung und aus einer Drehung um eine gewisse Axe betrachtet werden. Durch die parallele Bewegung wird aber das anfängliche Gleichgewicht nicht aufgehoben, indem die Coordinaten a, b, c aus den Bedingungsgleichungen (5) oder (8) für die Fortdauer des Gleichgewichts herausgegangen sind, und wie auch schon daraus erhellet, dass jede Kraft parallel mit ihrer anfänglichen Richtung auf denselben Punkt des Körpers fortwirken soll. Bei der Untersuchung über die Fortdauer des Gleichgewichts kommen daher bloss die Werthe von $\alpha, \ldots \gamma''$ oder die Winkel in Betracht, welche die Coordinatenaxen in ihrer neuen Lage mit den Axen in der alten Lage bilden, und diese Winkel nicht einmal vollständig, sondern zufolge der Gleichungen (8) bloss die durch die Winkel bestimmte Axe der Drehung.

Sind daher zwei nicht parallele Lagen des Körpers gegeben, in deren jeder Gleichgewicht statt findet, so lassen sich daraus noch unzählige andere Lagen finden, welche denselben Zweck erfüllen. Indem man nämlich

mit dem Körper ein rechtwinkliges Coordinatensystem fest verbindet und die zwei Lagen desselben, welche es bei den zwei verschiedenen Lagen des Körpers hat, mit einander vergleicht, ergeben sich die Werthe von $\alpha, \ldots \gamma''$, und aus diesen nach (10) und (6) die Werthe von τ, φ, χ, ψ, von denen die drei letzten wegen des Gleichgewichts den drei nothwendigen Bedingungsgleichungen (8) Genüge leisten werden. Da diese Gleichungen aber auch hinreichend sind, so wird mit Beibehaltung von φ, χ, ψ und beliebig anderer Annahme von τ das Gleichgewicht noch bestehen; oder mit andern Worten:

Zu zwei einander nicht parallelen Lagen eines Körpers lässt sich immer eine Richtung finden, so dass der Körper durch Drehung um eine mit dieser Richtung parallele Axe aus der einen Lage in eine mit der andern parallele Lage gebracht werden kann; und wenn der Körper in jeder dieser beiden Lagen im Gleichgewichte ist, so ist er es auch in jeder dritten, in welche er durch weitere Drehung um jene Axe und durch parallele Fortbewegung versetzt wird.

Ein Fall, dessen wir hierbei noch besonders gedenken müssen, ist der, wenn zugleich

$$\gamma' = \beta'', \ \alpha'' = \gamma, \ \beta = \alpha'$$

ist. Alsdann bleiben die Verhältnisse zwischen φ, χ, ψ nach den Formeln (6) unbestimmt, τ oder der doppelte Sinus des Drehungswinkels wird $=0$, und daher dieser Winkel selbst entweder $=0$, oder $=180°$. Im erstern Falle sind die beiden Lagen des Körpers, wo nicht identisch, doch mit einander parallel. Im letztern hat zwar eine Drehung statt gefunden, auch lassen sich dann die Werthe von φ, χ, ψ mittelst der Formeln (12)

bestimmen, indem σ, als der Cosinus des Drehungswinkels, $=-1$, und damit

$$\varphi^2 = \tfrac{1}{2}(1+\alpha),\ \chi^2 = \tfrac{1}{2}(1+\beta'),\ \psi^2 = \tfrac{1}{2}(1+\gamma'')$$

werden. Da aber τ in den Formeln (6) jetzt nicht mehr unbestimmt bleibt, so kann aus dem anfänglichen Gleichgewichte und dem Gleichgewichte nach einer Drehung um 180° noch nicht auf das Gleichgewicht nach einer Drehung um dieselbe Axe um irgend einen andern Winkel geschlossen werden.

§. 131.

Wenn das Gleichgewicht zwischen mehrern auf einen Körper wirkenden Kräften durch Drehung des Körpers um eine gewisse Axe nicht aufgehoben wird, so wollen wir die Axe eine Axe des Gleichgewichts nennen. Jede mit einer solchen parallele Axe ist bei einem frei beweglichen Körper, den wir bisher allein in Betrachtung nahmen, ebenfalls eine Axe des Gleichgewichts, da ihre Lage bloss durch die Winkel, welche sie mit den Coordinatenaxen bildet, bestimmt wird. Doch wollen wir der Kürze wegen von diesem Systeme paralleler Axen, als wie von einer einzigen, sprechen, und unter der einen, welche genannt wird, die übrigen ihr parallelen zugleich mit verstehen.

Nicht bei jedem Systeme von Kräften, welche an einem frei beweglichen Körper im Gleichgewichte sind, giebt es eine Axe des Gleichgewichts. Denn aus der zweiten und dritten der Gleichungen (8) folgt:

$$(15)\quad \varphi : \chi : \psi = gh - F^2 : FG + Hh : HF + Gg,$$

und wenn man diese Verhältnisswerthe von φ, χ, ψ in der ersten jener Gleichungen substituirt:

$$(16)\quad 2FGH + F^2 f + G^2 g + H^2 h - fgh = 0.$$

Dies ist demnach die Bedingungsgleichung, unter welcher eine Gleichgewichtsaxe statt findet. Wird sie erfüllt, so erhält man aus (15) die Verhältnisse zwischen φ, χ, ψ, und damit die Winkel, welche die Gleichgewichtsaxe mit den Axen der Coordinaten macht.

§. 132.

Soll ein System von Kräften, welche im Gleichgewichte sind, eine Gleichgewichtsaxe von einer durch φ, χ, ψ gegebenen Richtung haben, so müssen die drei Gleichungen (8) einzeln erfüllt werden.

Werde z. B. gefordert, dass die Axe der x eine Gleichgewichtsaxe sey. Alsdann sind φ und $\chi = 0$, und die drei Gleichungen ziehen sich zusammen in:

$$G = 0,\ F = 0,\ h = 0,$$

d. i. $\Sigma xZ = 0,\ \Sigma yZ = 0,\ \Sigma(xX + yY) = 0.$

Die zwei ersten dieser Gleichungen geben, in Verbindung mit der wegen des anfänglichen Gleichgewichts nöthigen Gleichung $\Sigma Z = 0$, zu erkennen (§. 73. Zus.), dass, wenn man jede Kraft an ihrem Angriffspunkte in zwei zerlegt, von denen die eine parallel mit der Ebene der x, y, die andere parallel mit der Axe der z ist, die mit der Axe der z parallelen Kräfte für sich im Gleichgewichte seyn müssen. Die dritte Gleichung, in Verbindung mit den Gleichungen $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma(xY - yX) = 0$, deutet an (§. 122.), dass, wenn die Kräfte auf die Ebene der x, y projicirt werden, das Gleichgewicht zwischen diesen Projectionen durch Drehung des Körpers um die Axe der z, als wodurch die Ebene der x, y in sich selbst gedreht wird, nicht aufgehoben werden darf. Wir können daher auch sagen:

Zur Fortdauer des Gleichgewichts, wenn der Körper, auf welchen die Kräfte wirken, um eine Axe gedreht wird, ist es nöthig und hinreichend, dass erstens die Projectionen der Kräfte auf Linien, welche man parallel mit der Axe durch die Angriffspunkte der Kräfte legt, für sich im Gleichgewichte sind, und dass zweitens das Gleichgewicht zwischen den Projectionen der Kräfte auf eine die Axe rechtwinklich schneidende Ebene bei der Drehung nicht aufhört.

§. 133.

Dass diese zwei Bedingungen die einzig nothwendigen zum Fortbestehen des Gleichgewichts sind, lässt sich ohne Zuhülfenahme der vorhergehenden Rechnung auch folgendergestalt sehr anschaulich durch Construction darthun.

Sey AB (Fig. 42.) die Drehungsaxe, welche man sich vertical denke; MN eine darauf normal gesetzte, also horizontale, Ebene. PQ sey eine der Kräfte des Systems und P ihr Angriffspunkt, so wie auch in dem Folgenden bei Darstellung einer Kraft durch eine gerade Linie der in dem Ausdrucke der Linie zuerst gesetzte Buchstabe immer den Angriffspunkt bezeichne.

Sey TU die rechtwinklige Projection von PQ auf MN, und PR, QS zwei Perpendikel von P, Q auf QU, PT. Man verlängere noch UT bis O, so dass $TO = UT$. Alsdann ist, auch bei beliebiger Verrückung des Körpers, die Kraft PQ gleichwirkend mit den an den Punkten P, T des Körpers angebrachten Kräften PR, PS, TU, TO, d.i. mit den Kräften TU, PS und dem Paare PR, TO.

Man verfahre auf gleiche Art mit jeder der übrigen Kräfte des Systems und ze[illegible] zwei andere

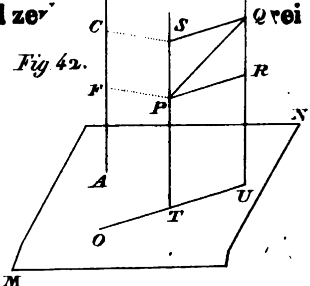


Fig. 42.

Systeme: in ein System *H*, dessen Kräfte *TU*,... in der horizontalen Ebene *MN* liegen, in ein System *V* von verticalen Kräften *PS*,... und in ein System *W*, aus Paaren *PR*, *TO*;... in verticalen Ebenen bestehend. Da nun *H*, *V*, *W* zusammen im Gleichgewichte seyn sollen, und die einfache horizontale Kraft oder das horizontale Paar, worauf sich *H* reduciren könnte, mit der einfachen verticalen Kraft oder dem verticalen Paare, worauf sich *V* und *W* in Verbindung zurückführen lassen könnten, nicht im Gleichgewichte seyn kann, so müssen *H* für sich und *V* und *W* zusammen für sich im Gleichgewichte seyn; also muss entweder *V* und *W*, jedes besonders, im Gleichgewichte seyn, oder *V* muss sich auf ein dem *W* gleiches und entgegengesetztes Paar reduciren lassen.

Man denke sich jetzt den Körper um die Axe *AB* um einen beliebigen Winkel gedreht, während die Kräfte *PQ*,... auf die Punkte *P*,..., oder, was dasselbe ist, die Kräfte *TU*, *PS*, *PR* und *TO*, etc. auf die Punkte *P* und *T*, etc. des Körpers, parallel mit ihren anfänglichen Richtungen, zu wirken fortfahren. Die Kräfte von *H* bleiben dabei in der horizontalen Ebene *MN*, die Kräfte von *V* bleiben vertical, und eben so wenig wird die Verticalität der Ebenen der Paare von *W* geändert. Da nun auch jetzt noch zwischen *H*, *V*, *W* Gleichgewicht herrschen soll, so muss, wie vorhin, *H* für sich im Gleichgewichte seyn, welches die zweite der obigen Bedingungen giebt: dass nämlich zwischen den Projectionen der Käfte auf eine die Drehungsaxe rechtwinklich schneidende Ebene bei Drehung der Ebene in sich selbst das Gleichgewicht besonders fortbestehe.

Ferner muss, wie vorhin, das System *V* entweder

für sich im Gleichgewichte seyn, oder ein dem W das Gleichgewicht haltendes Paar zur Resultante haben. Bei Drehung des Körpers um AB haben aber die mit AB parallelen Kräfte PS,..., aus denen V zusammengesetzt ist, ihre Lage gegen den Körper unverändert behalten. Je nachdem daher V anfangs im Gleichgewichte war, oder sich auf ein Paar reducirte, wird es auch jetzt noch im Gleichgewichte seyn, oder mit einem Paare gleiche Wirkung haben, dessen Moment dem des erstern Paares gleich ist, dessen Ebene aber mit der Ebene des erstern Paares einen dem Drehungswinkel gleichen Winkel macht.

Anders verhält es sich mit dem Systeme W der Paare PR und TO, etc. Die verticale Ebene eines jeden derselben bleibt bei der Drehung sich selbst parallel, mithin bleibt auch die Wirkung jedes Paares ungeändert (§. 50.); und je nachdem W anfänglich im Gleichgewichte war, oder sich auf ein Paar reducirte, wird es auch jetzt noch im Gleichgewichte, oder mit demselben, auch seiner Lage nach unverändert gebliebenen, Paare gleichwirkend seyn.

Hieraus folgt nun unmittelbar, dass jedes der beiden Systeme V und W für sich im Gleichgewichte seyn muss, indem sonst, wenn sie anfangs auf zwei sich das Gleichgewicht haltende Paare sich reducirt hätten, bei der Drehung des Körpers das von V herrührende Paar sich mit gedreht hätte, die Ebene des andern aber sich parallel geblieben, und somit das Gleichgewicht aufgehoben worden wäre. Das Gleichgewicht von V, oder das Gleichgewicht zwischen den nach Parallelen mit der Axe geschätzten Kräften des Systems ist demnach die zweite, oben zuerst genannte, Bedingung für die Fortdauer des Gleichgewichts,

und, da hiervon das Gleichgewicht des Systems W eine nothwendige Folge ist, keine dritte Bedingung weiter erforderlich.

— Wir nahmen bei dieser Beweisführung den Drehungswinkel beliebig an. Ist er gerade $= 180°$, so kommen die horizontalen Kräfte des Systems H in Bezug auf den Körper in eine ihrer anfänglichen direct entgegengesetzte Lage und sind daher, so wie anfangs, auch jetzt wieder im Gleichgewichte. Damit also nach einer Drehung um 180° noch Gleichgewicht statt finde, ist es nur nöthig, dass das System V oder die nach der Drehungsaxe geschätzten Kräfte des Systems unter sich im Gleichgewichte sind. — Daraus also, dass nach einer Drehung um 180° das Gleichgewicht noch besteht, kann noch nicht auf die Fortdauer desselben bei irgend einem andern Drehungswinkel geschlossen werden. (§. 130. zu Ende.)

§. 134.

Eben so wie $F=0$, $G=0$, $h=0$ die Bedingungen sind, unter denen die Axe der x eine Axe des Gleichgewichts ist, so drücken $G=0$, $H=0$, $f=0$ die Bedingungen aus, unter welchen der Körper, ohne das Gleichgewicht zu verlieren, um die Axe der x gedreht werden kann. Sind daher F, G, H, f, h zugleich $=0$, so sind sowohl die Axe der x, als die der x, und alle mit ihnen parallelen Axen, und nicht allein diese, sondern auch alle mit der Ebene der x, x überhaupt parallelen Axen, Axen des Gleichgewichts. Denn für jede dieser Axen ist $\chi=0$, und mit den sechs Gleichungen F, G, H, f, h, $\chi=0$ wird den drei Gleichungen (8) Genüge geleistet. Wenn folglich von zwei Axen, welche einen rechten Winkel mit einander

machen, eine jede eine Gleichgewichtsaxe ist, so ist es auch jede andere, welche mit der Ebene des Winkels parallel läuft.

Um die Sache allgemeiner zu untersuchen, seyen irgend zwei einander nicht parallele, durch φ, χ, ψ und φ', χ', ψ' bestimmte Axen Gleichgewichtsaxen zugleich. Alsdann muss seyn:

$$(8) \begin{cases} -\varphi f + \chi H + \psi G = 0, \\ \varphi H - \chi g + \psi F = 0, \\ \varphi G + \chi F - \psi h = 0, \end{cases} \text{ und}$$

$$(8^*) \begin{cases} -\varphi' f + \chi' H + \psi' G = 0, \\ \varphi' H - \chi' g + \psi' F = 0, \\ \varphi' G + \chi' F - \psi' h = 0. \end{cases}$$

Es folgt aber, wenn man zur Abkürzung

$$\chi\psi' - \chi'\psi = p, \quad \psi\varphi' - \psi'\varphi = q, \quad \varphi\chi' - \varphi'\chi = r$$

setzt und die erste Gleichung in (8) mit der ersten in (8*) verbindet:

$$-f : H : G = p : q : r,$$

und eben so durch Verbindung der zweiten und dritten Gleichung in (8) mit der zweiten und dritten in (8*):

$$H : -g : F = p : q : r,$$
$$G : F : -h = p : q : r.$$

Eliminirt man hieraus die Grössen p, q, r, von denen höchstens nur eine $= 0$ seyn kann, indem sonst die beiden Gleichgewichtsaxen einander parallel oder identisch wären, so erhält man nicht mehr, als folgende drei von einander unabhängige Gleichungen:

$$fF + GH = 0, \quad gG + HF = 0, \quad hH + FG = 0.$$

Dies sind demnach die Bedingungsgleichungen, bei denen zwei Gleichgewichtsaxen zugleich vorhanden sind. Eliminirt man aber damit f, g, h aus (8) oder (8*), so erhält man jedesmal dieselbe Gleichung:

$$\frac{\varphi}{F}+\frac{\chi}{G}+\frac{\psi}{H}=0, \text{ oder } \frac{\psi'}{F}+\ldots=0,$$

als die einzige jetzt zwischen den φ, χ, ψ der einen und andern Gleichgewichtsaxe zu erfüllende Relation. Dieser Gleichung leisten aber nicht bloss die vorigen zwei, sondern auch alle diejenigen Gleichgewichtsaxen Genüge, welche parallel mit der Ebene sind, deren Gleichung

$$\frac{x}{F}+\frac{y}{G}+\frac{z}{H}=0 \text{ ist.}$$

Giebt es daher bei einem Körper, welcher im Gleichgewichte ist, zwei einander nicht parallele Gleichgewichtsaxen, so sind es auch noch alle diejenigen, welche mit erstern beiden einer und derselben Ebene parallel laufen.

Hieraus ist leicht weiter zu folgern, *dass, wenn ein Körper drei Gleichgewichtsaxen a, b, c hat, welche, nicht einer und derselben Ebene parallel sind, auch jede vierte Axe d eine Gleichgewichtsaxe ist.* Denn denken wir uns sämmtliche Axen durch einen und denselben Punkt gehend (§. 131.), und werde dann eine durch a und b gelegte Ebene von der Ebene durch c und d in der Geraden e geschnitten, so dass e mit a und b in einer Ebene ist, und desgleichen d mit c und e. Da nun a und b Gleichgewichtsaxen sind, so muss auch e eine solche seyn; und weil e und c es sind, so muss es auch d seyn. — Wir können den hiermit bewiesenen Satz auch so ausdrücken: Ist ein Körper im Gleichgewichte, und wird dieses durch drei verschiedene Verrückungen nicht aufgehoben, so dauert es im Allgemeinen auch bei jeder vierten Verrückung fort; oder mit noch andern Worten:

Ist ein Körper in vier verschiedenen Lagen im Gleichgewichte, so ist er es im Allgemeinen auch in

jeder fünften. — Uebrigens ist dann, wie man leicht findet, jede der sechs Grössen F, G, H, f, g, h einzeln $=0$.

§. 135.

Ein im Gleichgewichte befindlicher Körper hat im Allgemeinen keine Axe des Gleichgewichts, da zum Vorhandenseyn einer solchen Axe die Erfüllung der Bedingungsgleichung (16) erfordert wird. Indessen ist es doch immer möglich, zu den sich anfangs das Gleichgewicht haltenden Kräften zwei neue das Gleichgewicht nicht störende Kräfte hinzufügen, welche eben so, wie die schon vorhandenen, auf bestimmte Punkte des Körpers mit parallel bleibenden Richtungen wirken, und wodurch es geschieht, dass der Körper eine Gleichgewichtsaxe von gegebener Richtung erhält.

Denn seyen P_1 und P_2, oder wenn wir sie nach den drei Coordinatenaxen zerlegen, (X_1, Y_1, Z_1) und (X_2, Y_2, Z_2) die zwei neuen Kräfte; A_1 und A_2, oder $(x_1\ y_1, z_1)$ und (x_2, y_2, z_2) ihre Angriffspunkte. Da das anfängliche Gleichgewicht des Körpers durch Hinzufügung dieser zwei Kräfte nicht aufgehoben werden soll, so müssen letztere zu Anfange einander ebenfalls das Gleichgewicht halten. Mithin muss seyn (§. 66.):

$$X_1 + X_2 = 0,\ Y_1 + Y_2 = 0,\ Z_1 + Z_2 = 0,$$

$$y_1 Z_1 + y_2 Z_2 = z_1 Y_1 + z_2 Y_2, \text{ etc.}$$

und wenn wir X_1, Y_1, Z_1 hieraus eliminiren:

$$(y_2 - y_1) Z_2 = (z_2 - z_1) Y_2,$$

$$(z_2 - z_1) X_2 = (x_2 - x_1) Z_2, \text{ etc.}$$

folglich, wenn wir noch die von A_1 bis A_2 gezogene Gerade $= r$, die Cosinus der Winkel dieser Geraden mit den Coordinatenaxen $= \lambda, \mu, \nu$, und daher

$$x_2 - x_1 = r\lambda,\ y_2 - y_1 = r\mu,\ z_2 - z_1 = r\nu$$

setzen:

$$X_2 : Y_2 : Z_2 = \lambda : \mu : \nu.$$

Mithin wirkt P_2 in der Linie r, wie schon aus dem VIII. Grundsatze in §. 14. fliesst, und es ist, wenn wir diese Kraft positiv annehmen, sobald sie nach der Richtung $A_1 A_2$ wirkt, also den Punkt A_2 von A_1 zu entfernen strebt:

$$X_2 = P_2\lambda,\ Y_2 = P_2\mu,\ Z_2 = P_2\nu.$$

Hiermit haben wir in unserm Systeme von Kräften über sieben neue Grössen: x_1, y_1, z_1, r, P_2 und die zwei Verhältnisse zwischen λ, μ, ν, zu verfügen, und werden diese Grössen auf unendlich viele Arten so bestimmen können, dass den drei Gleichungen (8), in denen φ, χ, ψ als gegeben anzusehen sind, Genüge geschieht. Die Rechnung hierzu, deren Ergebniss uns im nächsten Capitel von besonderem Nutzen seyn wird, ist folgende.

Heissen F', G', H', f', g', h' die Werthe, welche $F, G, \ldots h$ erhalten, sobald noch die Kräfte P_1 und P_2 zu dem gegebenen Systeme hinzugefügt werden, und es ist zufolge der Gleichungen (4):

$$F' = F + y_1 Z_1 + y_2 Z_2$$
$$= F + (y_2 - y_1) Z_2 = F + rP_2\mu\nu,$$

und wenn noch der Kürze willen

$$(a) \ldots rP_2 = Q$$

gesetzt wird:

$$F' = F + Q\mu\nu, \text{ und eben so}$$
$$G' = G + Q\nu\lambda,\ H' = H + Q\lambda\mu.$$
$$f' = f + y_1 Y_1 + y_2 Y_2 + z_1 Z_1 + z_2 Z_2$$
$$= f + (y_2 - y_1) Y_2 + (z_2 - z_1) Z_2,$$

d. i. $f' = f + Q(\mu^2 + \nu^2)$, und eben so

$$g' = g + Q(\nu^2 + \lambda^2),\ h' = h + Q(\lambda^2 + \mu^2).$$

Soll nun das jetzt um P_1 und P_2 vermehrte und durch $F', G', \ldots h'$ bestimmte System eine durch

φ, χ, ψ gegebene Axe des Gleichgewichts haben, so muss seyn (8):

$$G\psi + H\chi - f\varphi = 0,$$
$$H\varphi + F\psi - g\chi = 0,$$
$$F\chi + G\varphi - h\psi = 0.$$

Substituirt man hierin die für $F, \ldots H$ erhaltenen Werthe, so wird die erste dieser Gleichungen:

$$G\psi + H\chi - f\varphi = Q\{\varphi(\mu^2+\nu^2) - \lambda(\mu\chi+\nu\psi)\}$$
$$= Q(\varphi - x\lambda),$$

weil (b) $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ ist, und wenn man

(c) $\lambda\varphi + \mu\chi + \nu\psi = x$ setzt.

Eben so verwandeln sich die beiden andern Gleichungen in:

$$H\varphi + F\psi - g\chi = Q(\chi - x\mu),$$
$$F\chi + G\varphi - h\psi = Q(\psi - x\nu),$$

Um diese Formeln und die nachfolgende Rechnung noch mehr abzukürzen, setze man die als bekannt anzusehenden Grössen

$$(d)\ \begin{cases} G\psi + H\chi - f\varphi = D\alpha, \\ H\varphi + F\psi - g\chi = D\beta, \\ F\chi + G\varphi - h\psi = D\gamma, \end{cases}$$ und

$$(e)\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

wobei aus (d) die Verhältnisse zwischen α, β, γ, und hieraus in Verbindung mit (e) diese Grössen selbst, so wie auch D, sich finden lassen.

Die drei Bedingungsgleichungen werden damit:

$$(f)\ \begin{cases} D\alpha = Q(\varphi - x\lambda), \\ D\beta = Q(\chi - x\mu), \\ D\gamma = Q(\psi - x\nu). \end{cases}$$

Aus den fünf Gleichungen (b), (c), (f) muss man nun die Werthe der eben so viel Unbekannten λ, μ, ν, x, Q zu bestimmen suchen. Zu dem Ende multiplicire man die

drei Gleichungen (f) resp. mit φ, χ, ψ und addire sie hierauf, so kommt mit Berücksichtigung von (11) und (c):

$$D(\alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi) = Q(1 - x^2).$$

Eben so folgt mit Rücksicht auf (b) und (c), wenn man die Gleichungen (f), nach vorausgegangener Multiplication mit λ, μ, ν, addirt, und D nicht $= 0$ annimmt, indem sonst die drei Grössen $G\psi + H\chi - f\varphi$, etc. in (d) null wären, mithin das System die durch φ, χ, ψ gegebene Axe zur Gleichgewichtsaxe schon hätte und keine neuen Kräfte deshalb hinzuzufügen nöthig wären:

$$(g) \quad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0.$$

Addirt man endlich die Gleichungen (f), nachdem man sie mit α, β, γ multiplicirt hat, so kommt mit Rücksicht auf (e) und (g):

$$D = Q(\alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi).$$

Hieraus fliesst sogleich:

$$(h) \quad Q = \frac{D}{\alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi},$$

$$(i) \quad 1 - x^2 = (\alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi)^2,$$

oder, weil $1 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2)$ ist:

$$(i^*) \quad x^2 = (\beta\psi - \gamma\chi)^2 + (\gamma\varphi - \alpha\psi)^2 + (\alpha\chi - \beta\varphi)^2.$$

Die Werthe von λ, μ, ν ergeben sich dann aus (f), nämlich

$$(k) \quad \lambda = \frac{Q\varphi - D\alpha}{Qx} = \frac{\varphi - \alpha(\alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi)}{x}, \text{ u. s. w.}$$

Somit ist unsere Aufgabe: Zu einem durch $F, \ldots h$ gegebenen Systeme von Kräften, welche sich das Gleichgewicht halten, zwei neue Kräfte hinzuzufügen, wodurch das System eine durch φ, χ, ψ ihrer Richtung nach gegebene Axe des Gleichgewichts erhält, als gelöst zu betrachten.

Aus $F, \ldots h, \varphi, \chi, \psi$ berechne man nämlich mittelst der Formeln (d) und (e) die Werthe von D, α, β, γ,

und hieraus mit Hülfe der Formeln (h), (i) oder (i^*), und mit (k) die Werthe von Q, x und λ, μ, ν. In einer Geraden, parallel mit der durch λ, μ, ν bestimmten Richtung, nehme man hierauf beliebig zwei Punkte A_1 und A_2 und lasse resp. auf sie zwei einander gleiche Kräfte P_1 und P_2 nach entgegengesetzten Richtungen in der Geraden wirken, dergestalt, dass, vermöge (a), $A_1A_2.P_2 = Q$ ist, und P_2 die Richtung A_1A_2 oder A_2A_1 hat, also die Kräfte P_1, P_2 die Linie A_1A_2 aus einander zu ziehen oder zusammenzudrücken streben, nachdem Q positiv oder negativ ist; und es wird das um diese zwei Kräfte vermehrte System bei Drehung des Körpers um die durch φ, χ, ψ gegebene Axe im Gleichgewichte beharren.

§. 136.

Zusätze und Erläuterungen. *a*. Von x wird unmittelbar nur das Quadrat gefunden. Dieses ist vermöge (i^*) positiv, und daher x, folglich die Lösung der Aufgabe überhaupt, immer möglich. Ob man von den daraus entspringenden zwei Vorzeichen für x das positive oder negative nimmt, ist gleichgültig. Denn mit Aenderung des Zeichens von x ändern sich auch die Zeichen der Cosinus λ, μ, ν. Eine durch $-\lambda, -\mu, -\nu$ bestimmte Gerade aber hat dieselbe Lage gegen das Coordinatensystem, als eine durch λ, μ, ν bestimmte, nur die entgegengesetzte Richtung der letztern; und die Seite, nach welcher man die Richtung positiv nimmt, hat auf das Endresultat keinen Einfluss.

b. Mit nur einiger Aufmerksamkeit auf die Formeln des vorigen §. wird man wahrnehmen, dass die zwei Hauptstücke, welche zur Lösung unserer Aufgabe erforderlich sind: die anfängliche Lage der Linie A_1A_2

und die Grösse Q, auch durch eine sehr einfache Construction aus den gegebenen $F, \ldots h, \varphi, \chi, \psi$ gefunden werden können.

Man drücke die drei Grössen $G\psi + H\chi - f\varphi$, etc. in (d) durch Linien aus, trage dieselben vom Anfangspunkte der Coordinaten aus auf die Axen der x, y, z und vollende die Figur zu einem Parallelepipedum. Zufolge der Formeln (d) und (e) ist alsdann D = der vom Anfangspunkte aus gezogenen Diagonale dieses Parallelepipedums, und α, β, γ sind die Cosinus der Winkel, welche D mit den Axen der x, y, z macht. Man bezeichne die Richtung dieser Diagonale mit Δ (Fig. 43.) und eben so die Richtung der Gleichgewichtsaxe mit Φ und die anfängliche Richtung von A_1A_2 mit Λ. Da nun Φ und Λ eben so durch φ, χ, ψ und λ, μ, ν, wie Δ durch α, β, γ bestimmt werden, so ist

$$\varkappa = \lambda\varphi + \mu\chi + \nu\psi = \cos \Lambda\Phi,$$
$$\alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi = \cos \Delta\Phi,$$
$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = \cos \Delta\Lambda.$$

Hiermit werden die Gleichungen (g) und (i):

$$\cos \Delta\Lambda = 0 \text{ und } \sin \Lambda\Phi^2 = \cos \Delta\Phi^2.$$

Denken wir uns daher sämmtliche drei Linien Δ, Λ und Φ durch einen und denselben Punkt gehend, so schneiden sich Δ und Λ unter rechten Winkeln, und hiermit kann die Gleichung (i) nicht anders bestehen, als wenn Φ mit Δ und Λ in einer Ebene liegt.

Mittelst der bekannten Linien Φ und Δ wird demnach Λ ganz einfach dadurch gefunden, dass man in der durch Φ und Δ bestimmten Ebene auf Δ eine Normale errichtet. — Zieht man hierauf durch die Endpunkte des in Δ liegenden Abschnitts D Parallelen mit Λ, so wird vermöge der Gleichung (h), welche jetzt in

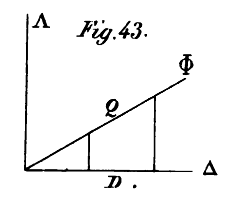


Fig. 43.

$$Q = D \sec A\Phi$$

übergeht, der zwischen diesen Parallelen enthaltene Theil von $\Phi_1 = Q$ seyn.

c. Sobald der Körper um die Gleichgewichtsaxe gedreht zu werden anfängt, gehen die Kräfte P_1 und P_2, welche anfangs in die Linie $A_1 A_2$ fallen und sich das Gleichgewicht halten, in ein Paar über, und dieses Paar ist mit den gegebenen Kräften des Systems stets im Gleichgewichte, folglich das Paar $-P_1, -P_2$ mit den gegebenen Kräften gleichwirkend. Wir können daher das im Vorigen erhaltene Resultat auch folgendergestalt ausdrücken:

Wird ein Körper, auf welchen mehrere sich das Gleichgewicht haltende Kräfte wirken, um eine Axe gedreht, so hört das Gleichgewicht im Allgemeinen auf, und die Wirkung der Kräfte reducirt sich auf die eines Paares, dessen Kräfte man eben so, wie die erstern Kräfte, auf zwei bestimmte Punkte des Körpers mit unveränderter Richtung und Intensität wirkend setzen kann.

d. Dass sich das Gleichgewicht bei Verrückung des Körpers in die Wirkung eines Paares verwandelt, geht schon aus den ersten drei Bedingungen des Gleichgewichts: $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, hervor, als welche von den Angriffspunkten und mithin von der Verrückung unabhängig sind und auch dann noch statt finden, wenn sich das System auf ein Paar reducirt (§. 70.). Dass aber bei Drehung des Körpers um eine und dieselbe Axe die Angriffspunkte, Richtung und Intensität der Kräfte des Paares unveränderlich angenommen werden können, folgt erst aus der jetzt entwickelten Theorie.

e. Von den sieben Grössen x_1, y_1, z_1, r, P_1, $\lambda : \mu$, $\mu : \nu$, welche zur vollkommenen Bestimmung der

zwei hinzuzufügenden Kräfte P_1, P_2 und ihrer Angriffspunkte A_1, A_2 erforderlich sind, können durch die drei Bedingungsgleichungen für die Fortdauer des Gleichgewichts bei der Drehung um eine gegebene Axe nur drei, oder drei von den sieben abhängige, Grössen bestimmte Werthe erhalten. In der That fanden wir durch unsere Rechnung nur den Werth des Products rP_2 und die durch $\lambda : \mu$ und $\mu : \nu$ bestimmte Lage von r gegen die Coordinatenaxen. Vier Stücke, wofür wir die drei Coordinaten x_1, y_1, z_1 des einen Angriffspunktes A_1 und seinen Abstand r vom andern A_2 rechnen können, blieben der Willkühr überlassen.

Es ist nicht schwer, von der willkührlichen Beschaffenheit dieser vier Stücke aus der Natur der Sache selbst sich zu überzeugen. Denn sey s irgend eine mit r parallele und, eben so wie r, mit dem Körper fest verbundene Linie, auf deren Endpunkte zwei einander gleiche und einander direct entgegengesetzte Kräfte S_1 und S_2 wirken, so dass $sS_2 = Q$. Nachdem der Körper gedreht worden, mache die Linie r, und folglich auch die mit ihr parallel gebliebene s, mit den der anfänglichen Lage von r und s parallel gebliebenen Kräften P_1, P_2, S_1, S_2 den Winkel δ. Hiermit haben sich P_1 und P_2 in ein Paar verwandelt, dessen Moment $= r P_2 \sin \delta = Q \sin \delta$, und eben so sind S_1 und S_2 in ein Paar übergegangen, dessen Moment $= sS_2 \sin \delta = Q \sin \delta$. Beide Paare haben mithin einander gleiche Momente, und da sie überdies, wie leicht einzusehen, in parallelen Ebenen liegen, so haben sie auch gleiche Wirkung, und es kann folglich das eine für das andere gesetzt werden.

---

§. 137.

Ein System von Kräften, welche nicht im Gleichgewichte sind, kann, wo nicht schon durch eine, doch immer durch zwei neue Kräfte, und dieses auf unendlich viele Arten, in den Zustand des Gleichgewichts gebracht werden. So wie wir nun im Vorigen zu einem schon im Gleichgewichte befindlichen Systeme zwei neue Kräfte hinzufügten, wodurch das Gleichgewicht nicht nur nicht gestört wurde, sondern auch bei der darauf folgenden Drehung um eine gegebene Axe noch fortdauerte, so wollen wir jetzt bei einem Systeme von Kräften, welche nicht im Gleichgewichte sind, die zwei zum Gleichgewichte noch erforderlichen Kräfte so zu bestimmen suchen, dass das Gleichgewicht durch die Drehung um eine gegebene Axe nicht unterbrochen wird.

Indem wir die ursprünglichen Kräfte und die zwei hinzuzufügenden, so wie die Angriffspunkte ihrer aller mit denselben Charakteren, wie vorhin, ausdrücken und überdies

$$[1]\begin{cases}\Sigma X = A, & \Sigma yZ = F, \quad \Sigma zY = F', \\ \Sigma Y = B, & \Sigma zX = G, \quad \Sigma xZ = G', \\ \Sigma Z = C, & \Sigma xY = H, \quad \Sigma yX = H', \\ \Sigma(yY + zZ) = f, & \Sigma(zZ + xX) = g, \text{ etc.}\end{cases}$$

setzen, haben wir zuerst wegen des anfänglichen Gleichgewichts die sechs Gleichungen:

$$[2]\begin{cases}X_1 + X_2 + A = 0, \\ Y_1 + Y_2 + B = 0, \\ Z_1 + Z_2 + C = 0.\end{cases}$$

$$[3]\begin{cases}y_1 Z_1 + y_2 Z_2 + F = z_1 Y_1 + z_2 Y_2 + F' = F'', \\ z_1 X_1 + z_2 X_2 + G = x_1 Z_1 + x_2 Z_2 + G' = G'', \\ x_1 Y_1 + x_2 Y_2 + H = y_1 X_1 + y_2 X_2 + H' = H''.\end{cases}$$

Setzen wir ferner

$$[4]\quad \begin{cases} y_1 Y_1 + y_2 Y_2 + z_1 Z_1 + z_2 Z_2 + f = f', \\ z_1 Z_1 + z_2 Z_2 + x_1 X_1 + x_2 X_2 + g = g', \\ x_1 X_1 + x_2 X_2 + y_1 Y_1 + y_2 Y_2 + h = h', \end{cases}$$

und wird, wie im Vorigen, die Richtung der Gleichgewichtsaxe durch φ, χ, ψ bestimmt, so kommen wegen der Fortdauer des Gleichgewichts zu den sechs Gleichungen [2] und [3] noch die drei hinzu

$$[5]\quad \begin{cases} G''\psi + H''\chi = f'\varphi, \\ H''\varphi + F''\psi = g'\chi, \\ F''\chi + G''\varphi = h'\psi; \end{cases}$$

und man hat somit zur Bestimmung der zwölf gesuchten Grössen $X_1, \ldots Z_2, x_1, \ldots z_2$ nicht mehr als neun Gleichungen, so dass drei dieser Grössen oder drei von ihnen abhängige Functionen der Willkühr überlassen bleiben.

Den Anfang der hierzu nöthigen Rechnung mache man damit, dass man X_1, Y_1, Z_1 aus [3] und [4] mittelst [2] eliminirt. Setzt man dabei, wie im Obigen, die von (x_1, y_1, z_1) bis (x_2, y_2, z_2) gezogene Gerade $= r$, und die Cosinus der Winkel dieser Geraden mit den drei Coordinatenaxen $= \lambda, \mu, \nu$, also

$$[6]\quad \begin{cases} x_2 - x_1 = r\lambda,\ y_2 - y_1 = r\mu,\ z_2 - z_1 = r\nu, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \end{cases}$$

so kommt nach vollzogener Elimination:

$$[7]\quad \begin{cases} r\mu Z_2 - y_1 C + F = r\nu Y_2 - z_1 B + F' = F'', \\ r\nu X_2 - z_1 A + G = r\lambda Z_2 - x_1 C + G' = G'', \\ r\lambda Y_2 - x_1 B + H = r\mu X_2 - y_1 A + H' = H'', \end{cases}$$

$$[8]\quad \begin{cases} r\mu Y_2 + r\nu Z_2 - y_1 B - z_1 C + f = f', \\ r\nu Z_2 + r\lambda X_2 - z_1 C - x_1 A + g = g', \\ r\lambda X_2 + r\mu Y_2 - x_1 A - y_1 B + h = h'. \end{cases}$$

Da die Substitution dieser Werthe von $F'', \ldots h'$ in [5] eine allzu complicirte Rechnung geben würde, so

wollen wir das Coordinatensystem so gelegt annehmen, dass die Axe der x mit der Axe, um welche der Körper gedreht werden soll, zusammenfällt. Hierdurch werden $\varphi = 0$, $\chi = 0$, $\psi = 1$, die Gleichungen [5] reduciren sich damit auf

$$G''' = 0,\ F''' = 0,\ h' = 0,$$

und wir bekommen vermöge [7] und [8] folgende sechs, die Lösung unsers Problems enthaltenden, Gleichungen:

$$[a]\ \begin{cases} r\mu Z_2 - y_1 C + F = 0, \\ r\nu Y_2 - z_1 B + F' = 0, \\ r\nu X_2 - z_1 A + G = 0, \\ r\lambda Z_2 - x_1 C + G' = 0, \\ r\lambda Y_2 - x_1 B + H = r\mu X_2 - y_1 A + H', \\ r\lambda X_2 + r\mu Y_2 - x_1 A - y_1 B + h = 0, \end{cases}$$

welche sich nach Elimination von X_2, Y_2, Z_2 auf folgende drei reduciren:

$$[b]\ \begin{cases} \lambda(F - y_1 C) - \mu(G' - x_1 C) = 0 \\ \lambda(F' - z_1 B) - \mu(G - z_1 A) + \nu(H' - H + x_1 B - y_1 A) = 0 \\ \lambda(G - z_1 A) + \mu(F' - z_1 B) - \nu(h - x_1 A - y_1 B) = 0. \end{cases}$$

Hieraus kann man noch λ, μ, ν wegschaffen und man erhält damit:

$$[c]\ 0 = [(F - y_1 C)(G - z_1 A) - (G' - x_1 C)(F' - z_1 B)](h - x_1 A - y_1 B)$$
$$- [(F - y_1 C)(F' - z_1 B) + (G' - x_1 C)(G - z_1 A)](H' - H + x_1 B - y_1 A),$$

eine Gleichung, die, wie die weitere Entwickelung derselben zeigt, nur vom zweiten Grade ist.

Der Punkt (x_1, y_1, z_1) liegt demnach in einer Fläche der zweiten Ordnung; und in derselben Fläche ist auch der Punkt (x_2, y_2, z_2) enthalten. Denn die Gleichungen (b), und folglich auch die aus ihnen abgeleitete [c], bleiben auch dann noch richtig, wenn man für x_1, y_1, z_1 resp. $x_1 + r\lambda$, $y_1 + r\mu$, $z_1 + r\nu$, als die Werthe von x_2, y_2, z_2, substituirt. Da ferner bei dieser Substitution die Grösse r herausgeht, und daher ganz willkührlich angenommen werden kann, so erhellet,

dass nicht nur die Punkte $(x_1, ..)$ und $(x_2, ..)$ selbst, sondern auch alle übrigen mit ihnen in einer Geraden liegenden Punkte in der Fläche enthalten sind, dass mithin diese Fläche der zweiten Ordnung durch Bewegung einer Geraden erzeugt werden kann und folglich ein hyperbolisches Hyperboloid ist.

Hat man demnach ein System von Kräften, welche nicht im Gleichgewichte sind, so können zwei Kräfte hinzugefügt werden, wodurch ein auch bei der Drehung um eine gegebene Axe fortdauerndes Gleichgewicht entsteht; oder, was dasselbe ist: die zwei Kräfte, auf welche das System zurückgeführt werden kann, lassen sich so bestimmen, dass das System bei der Drehung um eine gegebene Axe auf sie reducirbar bleibt. Dabei lässt sich ein hyperbolisches Hyperboloid angeben, von dessen zwei die Fläche erzeugenden Geraden die eine die Eigenschaft besitzt, dass die Angriffspunkte der zwei Kräfte willkührlich in irgend einer der Lagen dieser Geraden genommen werden können.

Sind auf diese Weise die zwei Angriffspunkte bestimmt worden, so ergeben sich die zwei Kräfte selbst aus [a] und [2].

§. 138.

Die zwei Kräfte, auf welche ein System von Kräften im Allgemeinen immer zurückgeführt werden kann, wurden im vor. §. so bestimmt, dass, wenn der Körper, auf den die Kräfte wirken, um eine gegebene Axe gedreht wird, diese zwei Kräfte mit den Kräften des Systems immer gleichwirkend bleiben. Die Wirkung der zwei Kräfte, und mithin der Kräfte des Systems, auf die Axe wird während der Drehung im Allgemeinen veränderlich seyn, da die Angriffspunkte der zwei Kräfte

gegen die Axe eine immer andere Lage bei der Drehung im Allgemeinen einnehmen. Nur in dem Falle werden die Kräfte des Systems auf die Axe fortwährend dieselbe Wirkung ausüben, wenn von den zwei Kräften, auf welche sie reducirt worden sind, die Angriffspunkte in die Axe selbst fallen.

Eine solche Axe, welche die Eigenschaft besitzt, dass, wenn der Körper um sie gedreht wird, die auf ihn wirkenden Kräfte auf zwei die Axe selbst treffende Kräfte reducirbar bleiben, und dass mithin, wenn an ihr die zwei Kräfte nach entgegengesetzter Richtung angebracht werden, ein auch bei der Drehung dauerndes Gleichgewicht entsteht, eine solche Axe wollen wir eine Hauptaxe der Drehung nennen.

Sie ist in gewissem Sinne dasselbe für ein System von Kräften, die keine einfache Resultante haben, was für parallele Kräfte, die sich auf eine einzige Kraft reduciren lassen, der Mittelpunkt war. Denn so wie der Mittelpunkt eines Systems paralleler Kräfte bei Drehung des Körpers um denselben fortwährend den nämlichen auf ihn unmittelbar gerichteten Druck erleidet, so wird auch die Hauptaxe, wenn der Körper um sie gedreht wird, von den Kräften des Systems stets auf dieselbe Weise gedrückt und kann durch zwei an ihr selbst angebrachte Kräfte im Gleichgewichte erhalten werden.

§. 139.

Die Hauptaxe der Drehung, welche einem gegebenen Systeme von Kräften zukommt, kann aus den Formeln des §. 137. ohne Schwierigkeit gefunden werden. Es wurde daselbst durch φ, χ, ψ die Richtung der Drehungsaxe überhaupt, und durch λ, μ, ν die Richtung

der Geraden bestimmt, an welcher die zwei zur Erhaltung des Gleichgewichts nöthigen Kräfte angebracht wurden. Ist nun die Axe der Drehung eine Hauptaxe, so sind beide Richtungen identisch, und es ist daher in diesem Falle:

$$\varphi = \lambda, \ \chi = \mu, \ \psi = \nu.$$

Hiermit werden die Gleichungen [5]:

$$[5^*] \begin{cases} H''\mu + G''\nu = f'\lambda, \\ F''\nu + H''\lambda = g'\mu, \\ G''\lambda + F''\mu = h'\nu. \end{cases}$$

Man substituire darin für f', g', h' ihre Werthe aus [8], und für F'', G'', H'' ihre Werthe aus [7], und zwar für jede der letztern Grössen ihren ersten oder zweiten Werth aus [7], je nachdem sie im ersten oder zweiten Gliede der linken Seite der Gleichungen [5*] sich befindet. Dies giebt nach leichter Reduction:

$$(H - x_1 B)\mu + (G' - x_1 C)\nu = (f - y_1 B - z_1 C)\lambda,$$
$$(F - y_1 C)\nu + (H' - y_1 A)\lambda = (g - z_1 C - x_1 A)\mu,$$
$$(G - z_1 A)\lambda + (F' - z_1 B)\mu = (h - x_1 A - y_1 B)\nu;$$

und wenn man noch die Gleichungen [7] resp. mit λ, μ, ν multiplicirt und dann addirt:

$$(F - F' - y_1 C + z_1 B)\lambda + (G - G' - z_1 A + x_1 C)\mu$$
$$+ (H - H' - x_1 B + y_1 A)\nu = 0.$$

Dies sind die Gleichungen, welche nach Wegschaffung von X_2, Y_2, Z_2 aus [5*] und [7] übrigbleiben, und aus denen die in ihnen noch vorkommenden Unbekannten $x_1, y_1, z_1, \lambda, \mu, \nu$ zu bestimmen sind.

Man setze der Kürze willen

$$[9] \begin{cases} f\lambda - H\mu - G'\nu = L, \\ g\mu - F\nu - H'\lambda = M, \\ h\nu - G\lambda - F'\mu = N, \\ (F - F')\lambda + (G - G')\mu + (H - H')\nu = O. \end{cases}$$

[10] $z_1\mu - y_1\nu = \xi,\ x_1\nu - z_1\lambda = \eta,\ y_1\lambda - x_1\mu = \zeta,$
woraus [11] $\xi\lambda + \eta\mu + \zeta\nu = 0$ folgt;
und es werden die erhaltenen vier Gleichungen:

$$[12]\quad \begin{cases} L = B\zeta - C\eta,\ M = C\xi - A\zeta,\ N = A\eta - B\xi, \\ O = A\xi + B\eta + C\zeta. \end{cases}$$

Hieraus fliesst:

$$[13]\quad \begin{cases} M\nu - N\mu = -A(\eta\mu + \zeta\nu) + B\xi\mu + C\xi\nu \\ \qquad\qquad = (A\lambda + B\mu + C\nu)\xi \text{ wegen [11]}, \\ N\lambda - L\nu = (A\lambda + B\mu + C\nu)\eta, \\ L\mu - M\lambda = (A\lambda + B\mu + C\nu)\zeta \end{cases}$$

und daraus in Verbindung mit der vierten der Gleichungen [12]:

$$[14]\quad A(M\nu - N\mu) + B(N\lambda - L\nu) + C(L\mu - M\lambda) = (A\lambda + B\mu + C\nu)O,$$

wozu noch die aus den drei ersten Gleichungen von [12] unmittelbar folgende Gleichung kommt:

$$[15]\quad AL + BM + CN = 0.$$

Somit haben wir auch ξ, η, ζ also auch x_1, y_1, z_1 eliminirt und dadurch zwei Gleichungen zwischen λ, μ, ν erhalten, von denen, weil L, M, N, O selbst homogene lineare Functionen von λ, μ, ν sind [9], die Gleichung [14] eine homogene Gleichung vom zweiten, und [15] eine homogene Gleichung vom ersten Grade ist. Nehmen wir daher für den Augenblick an, dass die durch die Cosinus λ, μ, ν ihrer Richtung nach bestimmte Axe durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehe, so können wir λ, μ, ν als die Coordinaten eines Punktes der Axe betrachten, und alsdann ist [14] die Gleichung einer Kegelfläche, welche im Anfangspunkte ihre Spitze hat, [15] aber die Gleichung einer durch denselben Punkt, also durch die Spitze des Kegels, gehenden Ebene. Da nämlich nun jene Kegelfläche und diese Ebene sich schneiden, welches immer in zwei Geraden

geschieht, oder bloss den gedachten Punkt gemein haben, ist die Lösung unserer Aufgabe möglich, oder unmöglich, und im ersten Falle wird die Richtung jeder der beiden Durchschnittslinien die Richtung der gesuchten Axe seyn können, *so dass es daher entweder zwei Hauptaxen der Drehung, die auch zusammenfallen können, oder gar keine giebt.*

Hat man die im möglichen Falle doppelt vorhandenen Werthe der Verhältnisse zwischen λ, μ, ν bestimmt, so ergeben sich mittelst [13] die zugehörigen Werthe von ξ, η, ζ. Diese Werthe, zwischen denen die Gleichung [11] obwaltet, in [10] substituirt, erhält man zwischen x_1, y_1, z_1 drei Gleichungen, von denen aus je zweien die dritte folgt, also die Gleichungen für eine gerade Linie, in welcher der eine Angriffspunkt (x_1, y_1, z_1) und zufolge [6] auch der andere $[x_2, y_2, z_2]$ enthalten ist. Diese mit der Richtung (λ, μ, ν), wie gehörig, parallele Linie ist demnach die gesuchte Hauptaxe. In ihr können die zwei Angriffspunkte willkührlich genommen werden, da zur Bestimmung ihrer Coordinaten keine Gleichungen weiter vorhanden sind.

Die in den zwei Punkten anzubringenden Kräfte ergeben sich jetzt aus [7] und [2]. Erstere Gleichungen gehören, wenn man X_2, Y_2, Z_2 als Coordinaten betrachtet, einer geraden Linie an, welche die durch λ, μ, ν bestimmte Richtung hat. Construirt man daher diese Linie, indem man (x_2, y_2, z_2) zum Anfangspunkte der Coordinaten nimmt, so wird jede von (x_2, y_2, z_2) bis zu einem Punkte der Linie gezogene Gerade die Kraft (X_2, Y_2, Z_2) vorstellen können. — Die andere Kraft (X_1, Y_1, Z_1) ist hierauf durch die Gleichungen [2] vollkommen bestimmt.

§. 140.

Um die jetzt vorgetragene Theorie durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir sie auf den möglich einfachsten Fall anwenden und für ein nur aus zwei Kräften bestehendes System die zwei Hauptaxen zu bestimmen suchen.

Seyen demnach (X, Y, Z), (X', Y', Z') die beiden Kräfte des Systems und (x, y, z), (x', y', z') ihre Angriffspunkte. Zur möglichsten Abkürzung der Rechnung werde die Ebene der x, y so gelegt, dass die erstere Kraft in ihr enthalten und die letztere mit ihr parallel ist, und daher $z, Z, Z' = 0$ sind. Zum Anfangspunkte der Coordinaten nehme man den Angriffspunkt der ersten Kraft selbst und setze daher noch $x, y = 0$. Die noch willkührliche Ebene der x, z lege man durch den Angriffspunkt der zweiten Kraft, wodurch $y' = 0$ wird.

Hiermit ergeben sich nach [1]:

$$\begin{aligned} &A = X + X', \quad B = Y + Y', \quad C = 0, \\ &F = 0 \quad\;\;, \; G = z'X' \;\;, \; H = x'Y', \\ &F' = z'Y' \;\;, \; G' = 0 \quad\;\;, \; H' = 0, \\ &f = 0 \quad\;\;\;, \; g = h = x'X'; \end{aligned}$$

und hieraus weiter nach [9]:

$$L = -H\mu, \quad M = h\mu, \quad N = h\nu - G\lambda - F'\mu,$$
$$O = -F'\lambda + G\mu + H\nu.$$

Wie man leicht findet, reduciren sich damit und wegen $C = 0$ die zwei aufzulösenden Gleichungen [14] und [15] zwischen λ, μ, ν auf:

$$(AF' - BG)(\lambda^2 + \mu^2) - (AH - Bh)\lambda\nu = 0,$$
$$(AH - Bh)\mu = 0;$$

und wenn man darin für A, B, G, H, F', h ihre Werthe, durch $X, \ldots z'$ ausgedrückt, setzt:

$$\text{I.} \quad (XY' - X'Y)\,[z'(\lambda^2 + \mu^2) - x'\lambda\nu] = 0,$$
$$\text{II.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (XY' - X'Y)\,x'\mu = 0.$$

Im Allgemeinen, d. h. ohne Voraussetzung einer besondern Beschaffenheit des Systems, ist daher zufolge II.:

$$\mu = 0.$$

Hiermit wird I. im Allgemeinen:

$$z'\lambda^2 - x'\lambda\nu = 0, \text{ also}$$

$$\text{entweder } \lambda = 0, \text{ oder } z'\lambda - x'\nu = 0.$$

Für die eine der beiden Hauptaxen sind daher

$$\lambda = 0,\ \mu = 0, \text{ und mithin } \nu = 1;$$

für die andere aber verhalten sich

$$\lambda : \mu : \nu = x' : 0 : z'.$$

Die eine Hauptaxe steht daher auf der Ebene der x, y, d. i. auf einer mit den beiden Kräften parallelen Ebene, rechtwinklig, und die andere ist parallel mit der Geraden durch die Angriffspunkte (0, 0, 0) und $(x', 0, z')$ der beiden Kräfte.

Die Gleichungen selbst, welche den Hauptaxen zugehören, lassen sich nun folgendergestalt finden. Mit Anwendung der Werthe 0, 0, 1 für λ, μ, ν, reduciren sich die für gegenwärtiges System bereits bemerkten Werthe von $L, .. O$ auf:

$$L = 0,\ M = 0,\ N = h,\ O = H.$$

Hiermit, und weil $C = 0$, werden die Gleichungen [12]:

$$0 = \zeta,\ h = A\eta - B\xi,\ H = A\xi + B\eta.$$

Die Gleichungen [10] werden: $\xi = -y_1, \eta = x_1, \zeta = 0$, und man erhält damit:

$$h = Ax_1 + By_1,\ H = -Ay_1 + Bx_1,$$

als die Gleichungen der einen Hauptaxe. Sie gehören einer Geraden an, welche die Ebene der x, y rechtwinklig in dem Punkte schneidet, dessen Coordinaten

$$x_1 = \frac{Ah + BH}{A^2 + B^2},\ y_1 = \frac{Bh - AH}{A^2 + B^2}$$

sind, und man erkennt bei Vergleichung derselben mit den Formeln in §. 125., dass dieser Punkt kein anderer, als der Mittelpunkt des auf die Ebene der x, y projicirten Systems ist. Denn die dortigen A, B, k haben hier die nämliche Bedeutung, und das dortige $N_1 = \Sigma(xY - yX)$, ist einerlei mit dem hiesigen $H - H'$, $= H$, weil $H' = 0$ ist.

Was die andere Hauptaxe anlangt, für welche $\mu = 0$ ist, und sich $\lambda : \nu = x' : z'$, also auch $= k : G$ verhalten, so werden damit:

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0;$$

folglich nach [13]: $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$;
und hiermit nach [10]: $y_1 = 0$, $x_1 z' - z_1 x' = 0$, welches die Gleichungen für eine Gerade sind, die durch die Punkte $(0, 0, 0)$ und $(x', 0, z')$, d. i. durch die Angriffspunkte der beiden Kräfte, geht.

Ein nur aus zwei Kräften bestehendes System hat demnach im Allgemeinen zwei verschiedene Hauptaxen. Die eine derselben steht normal auf einer Ebene, welche mit den beiden Kräften parallel ist, und trifft diese Ebene in dem Mittelpunkte der zwei auf die Ebene rechtwinklig projicirten Kräfte. Die andere Hauptaxe geht durch die Angriffspunkte der beiden Kräfte.

Ausnahmen hiervon finden statt:

1) Wenn $x' = 0$ ist, d. h. wenn die Gerade durch die beiden Angriffspunkte auf jeder der beiden Kräfte normal steht. Denn damit wird die Gleichung II. identisch, und I. reducirt sich auf $\lambda^2 + \mu^2 = 0$; folglich ist immer $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 1$. In diesem Falle coincidiren also die beiden Hauptaxen mit jener Geraden.

2) Wenn x' und z' zugleich $= 0$ sind, d. h. wenn die zwei Kräfte einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt

haben. Alsdann werden die Gleichungen I. und II. für alle Verhältnisse zwischen λ, μ, ν erfüllt, und jede durch den gemeinsamen Angriffspunkt gehende Gerade besitzt die Eigenschaft einer Hauptaxe.

3) Wenn $XY' = X'Y$, d. h. wenn die zwei Kräfte parallele Richtungen haben. Denn auch hier bleiben die Verhältnisse zwischen λ, μ, ν unbestimmt, und jede durch den Mittelpunkt der zwei parallelen Kräfte gelegte Gerade ist eine Hauptaxe.

Ist x' allein $= 0$, hat man also zwei einander nicht parallele auf zwei verschiedene Punkte in einer und derselben Ebene wirkende Kräfte, so reducirt sich I. auf $\lambda\nu = 0$, und es ist folglich entweder $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 1$, oder $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $\nu = 0$. In diesem Falle giebt es daher, wie im Allgemeinen, und wie auch zu erwarten stand, zwei Hauptaxen. Die eine derselben ist ein auf der Ebene der Kräfte in dem Mittelpunkte der letztern errichtetes Perpendikel; die andere ist die Verbindungslinie der beiden Angriffspunkte $(0, 0, 0)$ und $(x', 0, 0)$, und fällt daher jetzt mit der Axe der x zusammen.

§. 141.

Dass, wenn ein der Wirkung nur zweier Kräfte unterworfener Körper um eine der beiden im vorigen §. gefundenen Axen gedreht wird, die zwei Kräfte gleichwirkend mit zwei an der jedesmaligen Axe selbst angebrachten Kräften bleiben, die von unveränderlicher Lage und Intensität sind, dies ist für die Axe, welche durch die Angriffspunkte der zwei gegebenen Kräfte geht, von selbst klar. Dass aber dasselbe auch für die andere Axe gilt, welche auf der mit beiden Kräften parallelen Ebene normal steht, erhellet ohne Hülfe des Calculs auf folgende Weise.

Seyen PQ und $P'Q'$ (Fig. 44.) die beiden Kräfte, P und P' ihre Angriffspunkte, MN eine durch PQ gelegte und mit $P'Q'$ parallele Ebene. RS sey die rechtwinklige Projection von $P'Q'$ auf MN, und $RT = SR$ in der Verlängerung von SR. Von PQ und RS sey A der Mittelpunkt und AF die Resultante. Alsdann sind bei der Drehung um eine in A auf MN normal errichtete Axe AB die Kräfte PQ und $P'Q'$ gleichwirkend mit PQ, RS, $P'Q'$ und RT, also gleichwirkend mit der an der Axe selbst angebrachten Kraft AF und dem Paare $P'Q'$, RT. Da die Angriffspunkte P', R der Kräfte dieses Paares in einer Parallele mit der Axe AB liegen, so bleibt die Ebene des Paares bei der Drehung sich parallel, mithin seine Wirkung ungeändert und eben so gross als die Wirkung eines ihm parallelen Paares, welches dasselbe Moment hat, und von dessen Kräften die Angriffspunkte in AB fallen. Sind daher BC, AD die Kräfte dieses neuen Paares, so sind PQ und $P'Q'$ bei der Drehung des Körpers um AB fortwährend gleichwirkend mit den an AB selbst angebrachten Kräften AF, BC, AD, d. i. mit den zweien AG, BC, wenn AG die in A angebrachte Resultante von AF und AD ist.

Wiewohl nun hiermit auch synthetisch erwiesen worden, dass die zwei vorhin durch Analysis gefundenen Axen die den Hauptaxen zukommenden Eigenschaften besitzen, so erhellet doch aus diesen synthetischen Betrachtungen noch keineswegs, dass ausser diesen zwei Hauptaxen keine dritte existirt. Eben dieser Umstand aber wird uns sogleich zu neuen, für die Theorie der Hauptaxen überhaupt sehr fruchtreichen, Folgerungen hinleiten.

Fig. 44.

§. 142.

Auf den in den zwei vorigen §§. umständlich betrachteten Fall, wenn das System nur aus zwei Kräften besteht, lässt sich auch der zusammengesetztere Fall zurückführen, wenn alle auf den Körper wirkenden Kräfte $P, P', P'', \ldots$ einer und derselben Ebene parallel sind. — Man ziehe in dieser Ebene zwei unter beliebigem Winkel sich schneidende Gerade und zerlege parallel mit denselben jede Kraft in ihrem Angriffspunkte in zwei andere: P in X und Y; P' in X' und Y'; u. s. w. Von den parallelen Kräften $X, X', \ldots$ suche man den Mittelpunkt, welcher A heisse; eben so von den parallelen Kräften den Mittelpunkt B, und setze noch $X + X' + \ldots = X_1$ und $Y + Y' + \ldots = Y_1$. Alsdann sind, wie auch der Körper verrückt werden mag, die Kräfte $P, P', \ldots$ gleichwirkend mit den Kräften $X, X', \ldots$; $Y, Y', \ldots$, und diese immer gleichwirkend mit den Kräften X_1 und Y_1, deren Angriffspunkte resp. A und B sind. Dieselben zwei Hauptaxen, welche dem Systeme der zwei Kräfte X_1 und Y_1 zukommen, müssen folglich auch den Kräften $P, P', \ldots$ angehören. Die eine Hauptaxe der Kräfte $P, P', \ldots$ ist daher AB; die andere steht auf der Ebene, mit welcher die Kräfte parallel sind, normal und trifft diese Ebene in dem Mittelpunkte der auf sie projicirten Kräfte X_1 und Y_1, oder, was auf dasselbe hinauskommt, in dem Mittelpunkte der auf die Ebene projicirten Kräfte $P, P', \ldots$

Ausser diesen zwei Hauptaxen giebt es keine dritte. Wie daher auch in der Ebene, mit welcher $P, P', \ldots$ parallel sind, die zwei Geraden gezogen werden, mit denen parallel jede Kraft P in zwei andere, X und Y, zerlegt wird, so muss doch immer der Mittelpunkt A

der parallelen Kräfte X, Y, ... und der Mittelpunkt B der parallelen Kräfte Y, Y, ... in eine und dieselbe Gerade fallen.

§. 183.

Wir sind hiermit unvermutheter Weise zu einem merkwürdigen Satze gelangt, der unabhängig von dem Begriffe der Gleichgewichtscentren, und auch ohne Zuhülfenahme der Theorie derselben bewiesen werden kann. Wir wollen diesen Beweis zuerst für den einfacheren Fall führen, wenn die Kräfte in einer Ebene enthalten sind, wo der Satz folgendermaßen lauten wird:

Hat man ein System von Kräften in einer Ebene und zerlegt man jede Kraft in ihrem Angriffspunkte parallel mit zwei beliebigen, nicht parallelen Richtungen in der Ebene in zwei andere, so ist die Gerade, welche die zwei Mittelpunkte der mit der einen und der mit der andern Richtung parallelen Kräfte verbindet, immer dieselbe, wie auch die zwei nach [illegible] Richtungen in der Ebene genommen sein mögen; oder, wie dieser Satz auch noch ausgedrückt werden kann:

Werden durch die Angriffspunkte in einer Ebene enthaltener Kräfte Parallelen mit einer beliebigen Richtung in der Ebene gezogen und auf diese Parallelen die Kräfte unter Parallelen mit einer andern Richtung in der Ebene projicirt, so ist der Ort der Mittelpunkte der projicirten Kräfte eine gerade Linie.

Beweis. Es seien [illegible] parallele Kräfte X, Y, ..., welche [illegible] in einer Ebene enthalten seyn, [illegible] auf Linien projicirt werden, die mit irgend einer andern Richtung parallel sind, [illegible]

die Angriffspunkte der Kräfte gelegt sind, die projicirten Kräfte $\Xi, \Xi', \ldots$ denselben Mittelpunkt A, als die erstern Kräfte, haben. Dies folgt sogleich daraus, dass, um den Mittelpunkt eines Systems paralleler Kräfte zu finden, es schon hinreicht, die Angriffspunkte der Kräfte und die Verhältnisse ihrer Intensitäten zu einander zu kennen. Die Kräfte $X, X', \ldots$ haben aber mit resp. $\Xi, \Xi', \ldots$ einerlei Angriffspunkte, und vermöge der Natur der Projectionen stehen letztere Kräfte in denselben Verhältnissen zu einander, wie die erstern; folglich u. s. w.

Seyen nun $P, P', \ldots$ mehrere Kräfte in einer Ebene von beliebigen Richtungen. Man zerlege jede derselben in ihrem Angriffspunkte parallel mit zwei unter beliebigem Winkel sich schneidenden Richtungen in zwei: P in X und Y, P' in X' und Y', etc. und sey von den parallelen Kräften $X, X', \ldots$ der Mittelpunkt A, von $Y, Y', \ldots$ der Mittelpunkt B.

Man ziehe durch die Angriffspunkte Parallelen mit einer willkührlichen dritten Richtung in der Ebene und projicire auf sie sämmtliche Kräfte $P, P', \ldots$; $X, X', \ldots$; $Y, Y', \ldots$ durch Parallelen mit irgend einer vierten Richtung. Heissen diese Projectionen resp. $\Pi, \Pi', \ldots$; $\Xi, \Xi', \ldots$; $H, H', \ldots$ Alsdann fallen Π, Ξ, H in dieselbe Gerade, haben mit P einerlei Angriffspunkt und es ist, weil X und Y, P zur Resultante haben, Π die Resultante von Ξ und H (§. 40.), folglich $\Pi = \Xi + H$. Dasselbe gilt auch von den Projectionen der übrigen Kräfte $P', \ldots$ Das System der Kräfte $\Pi, \Pi', \ldots$ ist daher ganz identisch mit dem System $\Xi, H, \Xi', H', \ldots$ und hat mit ihm einerlei Mittelpunkt. Nach dem vorhin Bemerkten ist aber der Mittelpunkt von $\Xi, \Xi', \ldots$ einerlei mit dem Mittelpunkte A von $X, X', \ldots$, und

der Mittelpunkt von H, H' ... einerlei mit dem Mittelpunkte B von Y, Y',... Der Mittelpunkt von Ξ, Ξ', ... H, H', ... in Vereinigung, d. i. der Mittelpunkt von Π, Π', ..., fällt folglich immer in die Gerade AB, welches auch die Richtung seyn mag, mit welcher Π, Π',... parallel laufen.

§. 144.

Es lässt sich schon voraussehen, dass der Satz des vorigen §. auch auf ein System von Kräften im Raume sich ausdehnen lassen und hier also lauten wird:

Zieht man durch die Angriffspunkte nach beliebigen Richtungen im Raume wirkender Kräfte Parallelen mit irgend einer Richtung (p) *und projicirt darauf die Kräfte durch Linien, welche einer und derselben Ebene parallel sind, so ist der Ort des Mittelpunkts der projicirten Kräfte einer Ebene.*

Der Beweis hiervon ist dem vorigen ganz ähnlich. Sey P eine der Kräfte des Systems. Man zerlege sie in ihrem Angriffspunkte parallel mit drei beliebigen Axen in X, Y, Z, und verfahre eben so mit jeder der übrigen Kräfte. Seyen resp. A, B und C die Mittelpunkte der parallelen Kräfte X, der parallelen Y und der Z.

Die Projectionen von P, X, Y, Z auf die durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt dieser vier Kräfte mit der Richtung p gezogene Parallele seyen Π, Ξ, H, Ψ, so ist $\Pi = \Xi + H + \Psi$, und daher der Mittelpunkt aller Π einerlei mit dem Mittelpunkte aller Ξ, Y und Ψ. Zufolge des Satzes, welcher gleich zu Anfange des Beweises im vorigen §. aufgestellt wurde, haben aber die Kräfte Ξ denselben Mittelpunkt A, welcher den Kräften X zukommt, und eben so sind B und C die

Mittelpunkte der Kräfte H und der Kräfte Ψ. Folglich muss der Mittelpunkt der parallelen Projectionen Π mit A, B, C in einer Ebene liegen.

§. 145.

Den in den zwei vorigen §§. bewiesenen Sätzen gemäss, wollen wir bei einem Systeme von Kräften in einer Ebene die Gerade der Ebene, in welche der Mittelpunkt der mit irgend einer Richtung parallelen Projectionen der Kräfte immer zu liegen kommt, die Centrallinie, und bei Kräften im Raume die Ebene, in welche der Mittelpunkt der parallelen Projectionen stets fällt, die Centralebene des Systems nennen.

Jedes System von Kräften, — nur darf es weder im Gleichgewichte seyn, noch sich auf ein Paar reduciren, — hat daher, je nachdem es in einer Ebene oder im Raume enthalten ist, eine Centrallinie oder eine Centralebene. Doch kann es auch geschehen, dass bei einem Systeme in einer Ebene die Mittelpunkte A und B von den X und den Y, also auch die damit identischen von den Ξ und den H, zusammenfallen, und daher der Mittelpunkt der parallelen Projectionen Π immer derselbe Punkt ist, und dass bei einem System im Raume die Punkte A, B, C wo nicht coincidiren, doch in eine Gerade zu liegen kommen, und folglich der Mittelpunkt der parallelen Projectionen immer in dieselbe Gerade fällt.

Letzteres geschieht unter andern, wenn, wie in §. 142., die Kräfte des Systems einer und derselben Ebene parallel sind. Denn hier kann jede Kraft nach zwei mit der Ebene parallelen Richtungen in zwei andere, folglich das ganze System in zwei Systeme paralleler

Kräfte zerlegt werden, und es zeigt sich dann wie im Vorigen, dass mit den Mittelpunkten dieser zwei Systeme der Mittelpunkt der nach irgend einer andern Richtung projicirten Kräfte des ursprünglichen Systems immer in einer Geraden liegt.

Bei einem Systeme mit einer Ebene paralleler Kräfte, desgleichen bei Kräften, die in einer und derselben Ebene wirken, ist demnach die Centrallinie des Systems die eine Hauptaxe.

§. 146.

Bei einem Systeme von Kräften im Raume ist in der Centralebene des Systems eine Linie noch besonders zu beachten. Zerlegt man nämlich jede Kraft P in X, Y, Z parallel mit drei Axen x, y, z, von denen z auf der Centralebene normal ist, x und y aber in der Ebene selbst liegen, und sind A und B die Mittelpunkte aller X und aller Y, so werden diese Punkte immer in dieselbe Gerade der Ebene fallen, wie auch die Axen x und y in der Ebene genommen seyn mögen, in die Centrallinie nämlich der mit derselben Ebene parallelen Kräfte $(X, Y, 0)$, $(X', Y', 0)$, etc. Heisse diese Gerade die Centrallinie der Centralebene.

Auf gleiche Art wollen wir auch, wenn von den mit der Centralebene parallelen Kräften X, X',... und Y, Y',... die einen auf der Centrallinie normal, die andern mit ihr parallel genommen werden, den Mittelpunkt der mit der Centrallinie parallelen Kräfte den Centralpunkt der Centrallinie nennen.

§. 147.

Um hiervon eine Anwendung zunächst auf ein System von Kräften P, P',... in einer Ebene zu machen,

setze man, nachdem jede Kraft P parallel mit zwei rechtwinklichen Coordinatenaxen in X und Y zerlegt worden, die Coordinaten des Mittelpunktes der X, $= p, q$, und die Coordinaten des Mittelpunktes der Y, $= p', q'$. Alsdann ist (§. 108.)

$$p = \frac{\Sigma xX}{\Sigma X},\ q = \frac{\Sigma yX}{\Sigma X},\ p' = \frac{\Sigma xY}{\Sigma Y},\ q' = \frac{\Sigma yY}{\Sigma Y}.$$

Die Gerade durch die Punkte (p, q) und (p', q') ist die Centrallinie des Systems. Nehmen wir sie zur Axe der x, so werden q und $q' = 0$, also $\Sigma yX = 0$ und $\Sigma yY = 0$, und der Centralpunkt des Systems ist der Mittelpunkt $(p, 0)$ der jetzt mit der Centrallinie parallel laufenden X. Wir wollen ihn zum Anfangspunkte der Coordinaten wählen, und daher noch $p = 0$, also $\Sigma xX = 0$ setzen. Hiermit wird $h = \Sigma(xX + yY) = 0$, und die Ausdrücke in §. 125. für die Coordinaten des Mittelpunkts der Kräfte $P, P', \ldots$ reduciren sich auf

$$x_1 = \frac{BN}{A^2 + B^2},\ y_1 = \frac{-AN}{A^2 + B^2},$$

wo $A = \Sigma X$, $B = \Sigma Y$ und $N = \Sigma xY$. Es folgt hieraus:

$$Ax_1 + By_1 = 0,$$

woraus wir ersehen, *dass bei einem Systeme von Kräften in einer Ebene, die durch den Centralpunkt* (0, 0) *und* den Mittelpunkt (x_1, y_1) der Kräfte d. i. *den Durchschnitt der einen Hauptaxe mit der Ebene geführte Gerade die Resultante* (A, B) *der Kräfte rechtwinklig schneidet.* Die andere Hauptaxe ist, wie schon bemerkt worden, die Centrallinie selbst.

§. 148.

So wie bei einem Systeme von Kräften in einer Ebene die beiden Hauptaxen mit der Centrallinie und

dem Centralpunkte in genauer Verbindung stehen, so lässt sich erwarten, dass auch bei einem Systeme von Kräften im Raume eine solche Verbindung statt finden und sich daher unsere Rechnung sehr vereinfachen werde, wenn wir bei der Wahl der Coordinatenaxen die Centralebene, die Centrallinie und den Centralpunkt zum Grunde legen.

Sey, wie im Vorigen, jede Kraft P des Systems in ihrem Angriffspunkte (x, y, z) in drei Kräfte X, Y, Z nach den Richtungen dreier sich rechtwinklig schneidenden Coordinatenaxen zerlegt, und seyen in Bezug auf dieses Coordinatensystem (p, q, r), (p', q', r') und (p'', q'', r'') die resp. Mittelpunkte der einander parallelen Kräfte X, der Kräfte Y und der Kräfte Z. Alsdann ist mit Anwendung der Bezeichnungen [1]:

$$p = \frac{\Sigma xX}{\Sigma X} = \frac{g+h-f}{2A},$$

$$q = \frac{\Sigma yX}{\Sigma X} = \frac{H'}{A}, \quad r = \frac{\Sigma zX}{\Sigma X} = \frac{G}{A};$$

und eben so findet sich:

$$p' = \frac{H}{B}, \quad q' = \frac{h+f-g}{2B}, \quad r' = \frac{F'}{B},$$

$$p'' = \frac{G'}{C}, \quad q'' = \frac{F}{C}, \quad r'' = \frac{f+g-h}{2C}.$$

Wir wollen nun das Coordinatensystem so gelegt annehmen, dass erstlich die Ebene der x, y mit der Centralebene zusammenfällt, und dass daher $r, r', r'' = 0$ sind. Da hiermit die Kräfte Z auf der Centralebene normal stehen, so ist die Gerade durch $(p, q, 0)$ und $(p', q', 0)$ die Centrallinie; sie werde zur Axe der x genommen und daher $q, q' = 0$ gesetzt. Endlich werde der Centralpunkt, der jetzt $(p, 0, 0)$ zum Ausdrucke hat,

zum Anfangspunkte der Coordinaten gewählt, wodurch noch $p=0$ wird.

Bei dieser im Allgemeinen immer möglichen Annahme des Coordinatensystems sind also p, q, r, q', r', r'' insgesammt $=0$. Es folgt aber aus der Nullität von r', r, q:

$$F'=0,\ G=0,\ H'=0,$$

und daraus, dass $p, q', r''=0$ sind:

$$f=0,\ g=0,\ h=0.$$

Hiermit ziehen sich die Werthe [9] der vier Hülfsgrössen $L, \ldots O$ zusammen in:

$$L=-H\mu-G'\nu,\ M=-F\nu,\ N=0,$$
$$O=F\lambda-G'\mu+H\nu,$$

und die zwei Gleichungen [14] und [15] für die Verhältnisse zwischen λ, μ, ν werden nach Substitution dieser Werthe:

$$[14^*]\quad AF\lambda^2-(BG'-CH)\mu^2+(AF-BG'+CH)\nu^2$$
$$+AH\nu\lambda-(AG'-BF)\lambda\mu=0,$$

$$[15^*]\quad AH\mu+(AG'+BF)\nu=0.$$

Letztere Gleichung kann als eine Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten λ, μ, ν für die Ebene angesehen werden, welche, durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegt, mit den beiden Hauptaxen parallel ist (§. 139.). Da in dieser Gleichung der Coefficient von $\lambda=0$, und folglich die Axe der x, d. i. die Centrallinie, in dieser Ebene enthalten ist, so schliessen wir:

Bei einem Systeme von Kräften im Raume sind die zwei Hauptaxen der Drehung und die Centrallinie einer und derselben Ebene parallel.

Aus der Gleichung $N=0$ folgt noch in Verbindung mit [12]: $A\eta-B\xi=0$. Für den Durchschnitt einer

seyn, indem erstere drei Gleichungen die Bedingungen ausdrücken, unter denen die Resultante durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht (§. 71.), letztere zwei aber die Bedingungen, unter denen die Resultante die Richtung der Axe der x hat. Hiermit werden [9]:

$$L = f\lambda - H\mu - G\nu,\ M = g\mu - F\nu - H\lambda,$$
$$N = h\nu - G\lambda - F\mu,\ 0 = 0,$$

und damit [14] und [15]: $L\mu - M\lambda = 0$ und $N = 0$, d. i.

$$H(\lambda^2 - \mu^2) - G\mu\nu + F\lambda\nu + (f - g)\lambda\mu = 0,$$
$$h\nu - G\lambda - F\mu = 0.$$

Die Elimination von ν aus diesen zwei Gleichungen giebt:

$$[16^*]\quad \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 - \frac{F^2 - G^2 + fh - gh}{FG + Hh} \cdot \frac{\mu}{\lambda} - 1 = 0,$$

eine Gleichung, woraus ähnlicher Weise, wie aus [16], zu schliessen, dass ein System mit einer einfachen Resultante immer zwei Hauptaxen hat, und dass die Projectionen dieser Axen auf eine die Resultante normal treffende Ebene (als die jetzige Ebene der x, y) sich unter rechten Winkeln schneiden.

Die Gleichungen [12], welche die Lage der Hauptaxen näher bestimmen, werden jetzt:

$$L = -C\eta,\ M = C\xi,\ 0 = \zeta,$$

von denen die dritte: $\zeta = 0$, d. i. $y_1\lambda - x_1\mu = 0$, zu erkennen giebt, dass jede der beiden Hauptaxen die Axe der x, d. i. die Resultante, schneidet, wie auch schon ohnedies einleuchtet. Denn die zwei Kräfte (X_1, Y_1, Z_1) und (X_2, Y_2, Z_2), die, an den Punkten (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Hauptaxe angebracht, zur Herstellung des Gleichgewichts und zu seiner Erhaltung während der Drehung um die Hauptaxe erforderlich sind, müssen

der einfachen Resultante des Systems das Gleichgewicht halten, und dieses ist nicht anders möglich, als wenn sie beide, und folglich auch die von ihnen getroffene Hauptaxe, mit der Resultante in einer Ebene liegen.

Da übrigens die zwei Kräfte bei der Drehung des Körpers um die Hauptaxe ihre Lage nicht ändern, so wird auch die Resultante ihre anfängliche Lage unverändert behalten und mithin die Hauptaxe fortwährend in demselben Punkte schneiden.

Zur bessern Uebersicht wollen wir noch die Ergebnisse dieses und des vorigen §. in folgendem Satze vereinigt darstellen.

Wenn ein auf einen freien Körper wirkendes System von Kräften eine einfache Kraft zur Resultante hat, so lassen sich in der Richtung dieser Kraft zwei Punkte und zwei durch diese Punkte gehende Axen angeben von der Beschaffenheit, dass, wenn der Körper um die eine oder die andere Axe gedreht wird, während die Kräfte auf ihre Angriffspunkte mit unveränderter Richtung und Intensität zu wirken fortfahren, das System mit einer einzigen Kraft, die mit der anfänglichen Resultante der Lage und Intensität nach identisch ist, gleichwirkend bleibt; dass folglich, wenn der Körper in dem einen oder dem andern jener Punkte befestigt wird, ein Gleichgewicht entsteht, welches durch Drehung des Körpers um die dem Punkte zugehörige Axe nicht aufgehoben wird.

Diese zwei Axen haben übrigens eine solche Lage, dass erstens ihre Projectionen auf eine die Resultante normal treffende Ebene, so wie zweitens ihre Projectionen auf die Centralebene, sich recht-

winklig schneiden, dass drittens eine mit den beiden Axen parallele Ebene zugleich mit der Centrallinie parallel ist, und dass viertens die zwei Punkte, in denen die Centralebene von den Axen getroffen wird, mit dem Centralpunkte in einer Geraden liegen, welche mit der Resultante rechte Winkel bildet.

---

§. 151.

So wie es demnach bei einem Systeme paralleler Kräfte in der im Allgemeinen ihm zukommenden einfachen Resultante einen Mittelpunkt, d. h. einen solchen Punkt giebt, dass, wenn er fest gemacht wird, das dadurch entstehende Gleichgewicht bei beliebiger Drehung des Körpers um diesen Punkt nicht aufhört, so giebt es ähnlicher Weise bei einem Systeme nicht paralleler Kräfte, welche sich auf eine einzige Kraft reduciren lassen, in dieser Resultante zwei solcher Mittelpunkte, nur mit dem Unterschiede, dass jedem derselben eine bestimmte Axe zukommt, um welche der Körper gedreht werden muss, wenn das durch Festmachung des einen oder des andern Punktes erzeugte Gleichgewicht durch die Drehung nicht aufgehoben werden soll.

Ist das System nicht anders als auf zwei Kräfte reducirbar, so reicht es zur Herstellung des Gleichgewichts nicht mehr hin, einen einzigen Punkt fest zu machen, sondern es müssen dann zwei in den zwei Resultanten genommene Punkte, oder die durch diese Punkte gehende Gerade, unbeweglich gemacht werden, und solcher Geraden, welche zugleich die Eigenschaft besitzen, dass, wenn der Körper um sie gedreht wird, das Gleichgewicht fortdauert, und dass die Drückungen, welche sie erleiden, ihrer Richtung und Stärke nach

unverändert bleiben, solcher Axen giebt es nach §. 139. entweder zwei oder gar keine.

Wenn dagegen, was ausdrücklich noch bemerkt werden muss, bloss dieses gefordert wird, dass durch Befestigung einer Axe des Körpers Gleichgewicht entsteht, und dieses Gleichgewicht bei Drehung um die Axe fortdauert, und wenn nicht zugleich Unveränderlichkeit der Richtung und Stärke des während der Drehung von den Kräften auf die Axe ausgeübten Druckes verlangt wird, so kann die Axe jeder beliebigen Richtung parallel seyn.

Sey nämlich *MN* (Fig. 42.) eine beliebig gegebene Ebene, auf welcher die Axe normal seyn soll. Nach §. 133. kann dann für jede Kraft *PQ* des Systems substituirt werden: ihre Projection *TU* auf *MN*, ihre Projection *PS* auf eine durch *P* mit der Axe gezogene Parallele, und das Paar *PR*, *TO*, von dessen Kräften die Angriffspunkte *P*, *T* in einer Parallele mit der Axe liegen. Ist nun die Axe fest, so können die Kraft *PS* und das Paar *PR*, *TO* auch während der Drehung des Körpers um die Axe keine Bewegung hervorbringen. Denn die Ebene des Paares bleibt immer der Axe parallel, und das Paar ist daher stets gleichwirkend mit einem Paare, dessen Kräfte an der Axe selbst angebracht sind. Ist ferner *AB* die Axe selbst, und nimmt man darin *FG*=*PS*, so ist das Paar *PS*, *GF* gleichwirkend mit dem Paare *SG*, *FP* (§. 20.), folglich *PS* gleichwirkend mit *FG* und dem Paare *SG*, *FP*. Die Kraft *PS* kann mithin keine Bewegung erzeugen, da *FG* in der Axe selbst wirkt, und die Kräfte *SG*, *FP* des Paares sowohl anfänglich, als bei der nachherigen Drehung, die Axe immer treffen.

Bei Drehung des Körpers um die feste Axe AB ist daher die in P angebrachte Kraft PQ von gleicher Wirkung mit der auf T wirkenden Kraft TU, d. h. mit ihrer Projection auf irgend eine die Axe rechtwinklig schneidende Ebene MN.

Soll demnach bei Drehung des Körpers um eine feste Axe, welche auf der gegebenen Ebene MN normal steht, immer Gleichgewicht herrschen, ohne Rücksicht darauf, ob der Druck, der auf die Axe während der Drehung ausgeübt wird, stets derselbe bleibt, oder nicht, so projicire man sämmtliche Kräfte mit ihren Angriffspunkten auf die Ebene MN und suche von diesen Projectionen den Mittelpunkt A; und es wird zufolge der Eigenschaft dieses Punktes eine in ihm auf MN errichtete Normale AB die gesuchte Axe seyn.

§. 152.

Zusätze. *a.* Dass die somit bestimmte Axe bei der Drehung im Allgemeinen einen veränderlichen Druck erleidet, ist leicht einzusehen. Denn dieser Druck wird hervorgebracht von den Resultanten 1) der Kräfte TU, 2) der Paare PR, TO, 3) der Kräfte FG und 4) der Paare SG, FP. Nun bleiben die drei erstern Resultanten, und folglich auch der von ihnen auf die Axe ausgeübte Druck, unverändert. Denn der Hypothese zufolge geht die Resultante aller TU fortwährend durch A selbst und ändert weder ihre Richtung noch Intensität. Die Paare PR, TO bleiben, bei der Drehung, der Axe und sich selbst parallel und wirken daher auf die Axe unausgesetzt auf dieselbe Weise. Eben so wenig können die längs der Axe selbst gerichteten Kräfte FG ihre Wirkung ändern. Dagegen werden die Paare SG, FP, und folglich auch ihre Resultante,

bei der Drehung des Körpers um einen eben so grossen Winkel mit gedreht und drücken daher die Axe nach immer andern Richtungen. — Nur dann also, wenn letztere Paare *SG*, *FP* sich das Gleichgewicht halten, ist die Axe fortwährend demselben Druck unterworfen; sie ist dann eine Hauptaxe der Drehung.

b. Unter allen Richtungen, mit denen die feste Axe parallel seyn kann, ist allein die Richtung der Hauptlinie des Systems (§. 82.) ausgenommen. Denn die Projectionen der Kräfte auf eine die Hauptlinie rechtwinklig schneidende Ebene reduciren sich im Allgemeinen auf ein Paar, und es ist daher unmöglich, durch Befestigung der Hauptlinie oder einer mit ihr parallelen Axe Gleichgewicht zu erhalten.

Ist ein solches Paar nicht vorhanden, sondern halten sich die Projectionen das Gleichgewicht, so hat das System eine einfache Resultante, deren Richtung die der Hauptlinie ist. Alsdann wird zwar durch Befestigung einer mit der Hauptlinie parallelen Axe ein anfängliches Gleichgewicht hervorgebracht; dasselbe geht aber sogleich bei der nachherigen Drehung verloren, — es müsste denn von den sich das Gleichgewicht haltenden Projectionen der Angriffspunkt einer jeden der Mittelpunkt der jedesmal übrigen seyn. Denn in diesem speciellen Falle hat jede mit der Hauptlinie parallele Axe die Eigenschaft, dass, wenn sie unbeweglich gemacht wird, ein auch bei der Drehung dauerndes Gleichgewicht entsteht.

§. 153.

Der Vollständigkeit wegen ist noch zu untersuchen übrig, ob und wenn sich bei einem Systeme, welches

mit einem Paare gleichwirkend ist, Hauptaxen der Drehung angeben lassen. Alsdann sind $A, B, C = 0$, und die Gleichungen [12] reduciren sich hiermit auf: $L, M, N, O = 0$, d. i. wegen [9]:

$$[17] \begin{cases} f\lambda - H\mu - G'\nu = 0, \\ g\mu - F\nu - H'\lambda = 0, \\ h\nu - G\lambda - F'\mu = 0, \\ (F - F')\lambda + (G - G')\mu + (H - H')\nu = 0. \end{cases}$$

Hiermit haben wir vier Gleichungen zwischen den zwei die Richtung der Hauptaxe bestimmenden Verhältnissen $\lambda : \mu$ und $\mu : \nu$, jede vom ersten Grade, erhalten; die Coordinaten der Angriffspunkte der zwei hinzuzufügenden Kräfte sind aber ganz herausgegangen. Dies führt uns zu der Folgerung, *dass bei einem Systeme, welches sich auf ein Paar reducirt, nur dann Hauptaxen der Drehung vorhanden sind, wenn die zwei Gleichungen erfüllt werden, welche nach Elimination von λ, μ, ν aus den vier Gleichungen* [17] *hervorgehen; und dass, wenn diesen zwei Gleichungen Genüge geschieht, jede Gerade, welche mit der durch λ, μ, ν aus zweien der vier Gleichungen bestimmten Richtung parallel ist, als Hauptaxe dienen kann.*

Die hierzu nöthige Rechnung lässt sich dadurch noch sehr vereinfachen, dass man die Ebene des mit dem Systeme gleichwirkenden Paares zu einer der Coordinatenebenen wählt. Nach §. 70. hat die Ebene des resultirenden Paares, wenn sie durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegt wird, die Gleichung:

$$(F - F')x + (G - G')y + (H - H')z = 0.$$

Nehmen wir daher diese Ebene zur Ebene der x, z, deren Gleichung $y = 0$ ist, so wird $F = F'$ und $H = H'$.

Hiermit reducirt sich von den Gleichungen [17] die vierte auf

$$\mu = 0,$$

d. h. *die Hauptaxen sind* mit der Ebene der x, z, also *mit der Ebene des resultirenden Paares, parallel;* die drei ersten Gleichungen aber werden:

$$f\lambda - G'\nu = 0,\ F\nu + H\lambda = 0,\ h\nu - G\lambda = 0,$$

und es müssen die drei hieraus folgenden Werthe des Verhältnisses $\lambda : \nu$ einander gleich seyn, also

$$G' : f = F : -H = h : G,$$

wenn Hauptaxen vorhanden seyn sollen.

Beispiel. Bestehe das System nur aus zwei Kräften, welche daher für sich ein Paar bilden müssen. Die Ebene dieses Paares nehme man zur Ebene der x, z, und setze hiernach die Kräfte: $(X, 0, Z)$, $(-X, 0, -Z)$, und ihre Angriffspunkte: $(x, 0, z)$, $(x', 0, z')$. Dies giebt nach [1]:

$$G' = (x - x')\,Z,\ f = (z - z')\,Z,\ F = 0,\ H = 0,$$
$$h = (x - x')\,X,\ G = (z - z')\,X.$$

Da diese Werthe von $G', \ldots G$ der vorigen Doppelproportion Genüge leisten, so hat gegenwärtiges System Hauptaxen; und da

$$\lambda : \nu = x - x' : z - z',$$

so sind sie parallel mit der die Angriffspunkte beider Kräfte verbindenden Geraden.

§. 154.

Soll ein System, welches auf ein Paar reducirbar ist, Hauptaxen des Gleichgewichts haben, und sollen diese parallel mit einer durch λ, μ, ν gegebenen Richtung seyn, so sind die vier Gleichungen [17] die Be-

dingungen, unter denen dieses möglich ist. Sollen daher die Hauptaxen parallel mit der Axe der x seyn, als für welche λ und $\mu = 0$ sind, so hat man als Bedingungen:

$$G' = 0,\ F = 0,\ h = 0,\ H - H' = 0, \text{ d. i.}$$
$$\Sigma xZ = 0,\ \Sigma yZ = 0,\ \Sigma(xX + yY) = 0,\ \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Wegen der zwei erstern, und weil zugleich $\Sigma Z = 0$, müssen die Projectionen der Kräfte auf Linien, die durch die Angriffspunkte der Kräfte gelegt und mit der Axe der x, also mit den Hauptaxen, parallel sind, für sich im Gleichgewichte seyn. Aus den zwei letztern Gleichungen aber folgt in Verbindung mit $\Sigma X = 0$ und $\Sigma Y = 0$, dass die Projectionen der Kräfte auf eine die Hauptaxen rechtwinklig schneidende Ebene einander das Gleichgewicht halten müssen, und dass dieses Gleichgewicht bei Drehung der Ebene in sich selbst, also auch bei Drehung des Körpers um eine der Hauptaxen, nicht verloren gehen darf (§. 122.).

Wir haben hiermit dieselben zwei Bedingungen erhalten, welche im Obigen (§. 132.) zur Fortdauer des schon anfänglich bestehenden Gleichgewichts bei der Axendrehung nöthig waren, und es erhellet leicht, wie diese Bedingungen für den jetzigen Fall, eben so wie für den früheren, auch durch die in §. 133 angewendete Construction hätten gefunden werden können. Auf ähnliche Art endlich, wie in §. 151., zeigt sich auch hier, dass, wenn die Axe, um welche der Körper gedreht werden soll, fest ist, und es nicht darauf ankömmt, dass sie einen der Richtung und Stärke nach unveränderlichen Druck erfahre, schon die Erfüllung der zweiten Bedingung, oder das fortdauernde Gleich-

gewicht zwischen den auf die normale Ebene projicirten Kräften, hinreichend ist.

Neuntes Kapitel.

Von der Sicherheit des Gleichgewichts.

§. 155.

Wenn mehrere auf einen frei beweglichen Körper wirkende Kräfte im Gleichgewichte sind, und der Körper um so wenig, als es auch sey, aus seiner Lage gebracht wird, während die Kräfte parallel mit ihren anfänglichen Richtungen und mit unveränderter Intensität auf ihre Angriffspunkte zu wirken fortfahren, so hört das Gleichgewicht im Allgemeinen auf und die Kräfte suchen den Körper entweder in seine anfängliche Lage zurückzubringen, oder sie streben ihn noch mehr davon zu entfernen. Im erstern Falle wird das Gleichgewicht sicher, stabil, genannt, im letztern unsicher, nicht stabil.

Die Lehre von der Sicherheit des Gleichgewichts, in ihrer ganzen Ausdehnung genommen, gehört nicht sowohl der Statik, als vielmehr der Mechanik an. Letztere Wissenschaft zeigt, dass, wenn das Gleichgewicht sicher ist, und wenn der aus der Lage des Gleichgewichts verrückte Körper durch die Kräfte in diese Lage zurückgebracht ist, er gleichwohl nicht darin verharrt, sondern vermöge der erlangten Geschwindigkeit sich eben so weit nach der entgegengesetzten Seite entfernt, aus der er dann abermals zurückgetrieben wird und somit, gleich einem Pendel, um die Lage

des Gleichgewichts hin und her Schwingungen macht. In der Natur werden diese Schwingungen wegen der Reibungen, denen die Bewegung des Körpers stets ausgesetzt ist, immer kleiner, hören zuletzt ganz auf, und der Körper kommt in der Lage des Gleichgewichts wieder zur Ruhe.

So wenig nun auch diese Bewegungen ein Gegenstand der Statik seyn können, so vermag doch diese Wissenschaft Regeln anzugeben, mittelst deren sich in jedem besondern Falle erkennen lässt, ob das Gleichgewicht im Zustande der Sicherheit oder der Unsicherheit ist.

§. 156.

Um uns die Sache zuerst an dem einfachsten Beispiele deutlich zu machen, wollen wir auf einen Körper nur zwei Kräfte P_1, P_2 wirken lassen. Ihre Angriffspunkte denke man sich in einer Verticalen liegend; A_1 sey der tiefere, A_2 der höhere Punkt. Wegen des Gleichgewichts, das zwischen den zwei Kräften statt finden soll, müssen sie einander gleich, und ihre Richtungen ebenfalls vertical, aber einander entgegengesetzt seyn. Dieses ist auf doppelte Weise möglich, jenachdem nämlich entweder die im obern Punkte A_2 angebrachte Kraft P_2 nach oben und die im untern Punkte A_1 angebrachte P_1 nach unten, oder P_2 nach unten und P_1 nach oben wirkt, jenachdem also die zwei Kräfte ihre Angriffspunkte von einander zu entfernen, oder einander näher zu bringen streben.

Wird nun der Körper verrückt, und die Linie $A_1 A_2$ dadurch aus der verticalen Lage gebracht, z. B. von der Linken nach der Rechten gedreht, so bilden jetzt die zwei Kräfte ein Paar, welches im erstern Falle

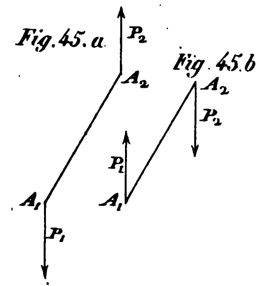
einen Sinn von der Rechten nach der Linken hat, also die Linie $A_1 A_2$ in die verticale Lage zurückzubringen strebt (Fig. 45. *a.*), im letztern Falle aber einen Sinn von der Linken nach der Rechten hat und mithin die Linie von der verticalen Lage noch mehr zu entfernen sucht (Fig. 45. *b.*). Im erstern Falle ist mithin das anfängliche Gleichgewicht sicher, im letztern unsicher, und wir erhalten damit den Satz:

Das Gleichgewicht zwischen zwei Kräften ist sicher oder unsicher, jenachdem die Kräfte ihre Angriffspunkte von einander zu entfernen oder einander zu nähern streben.

§. 157.

Zusätze. *a.* Zu noch mehrerer Erläuterung des voranstehenden Satzes kann folgende Betrachtung dienen. — Wie auch die verticale Linie $A_1 A_2$ aus der verticalen Lage gebracht werden mag, so wird dadurch der gegenseitige Abstand ihrer Endpunkte, wenn man ihn nach verticaler Richtung schätzt, immer verkleinert. Wenn demnach die zwei nach verticalen Richtungen wirkenden Kräfte den Abstand der Endpunkte zu vergrössern streben, so werden sie den durch die Verrückung kleiner gewordenen Abstand auf seinen anfänglichen grössten Werth und die Linie $A_1 A_2$ in ihre anfängliche Lage zurückzubringen suchen; ihn aber noch mehr zu verkleinern und dadurch die Linie noch mehr von der verticalen Lage zu entfernen suchen, wenn schon vor der Verrückung das Streben der Kräfte auf Verkleinerung des Abstandes gerichtet war.

b. Die Bedingung für die Sicherheit des Gleichgewichts zwischen zwei Kräften kann man auch dadurch ausdrücken, dass die Richtung von dem einen Angriffs-



punkte A_1 zum andern A_2 mit der Richtung der auf den letztern wirkenden Kraft P_2, also auch die Richtung von A_2 nach A_1 mit der Richtung von P_1, einerlei seyn muss. Sind diese zwei Richtungen einander entgegengesetzt, so ist das Gleichgewicht unsicher. Oder kürzer, indem wir diese Bedingungen analytisch ausdrücken: das Gleichgewicht ist sicher oder unsicher, nachdem das Product $A_1 A_2 . P_2 = A_2 A_1 . P_1$ einen positiven oder negativen Werth hat.

c. Das zwischen zwei Kräften bestehende Gleichgewicht hört nur bei einer solchen Verrückung des Körpers auf, wodurch die Richtung der die Angriffspunkte der beiden Kräfte verbindenden Geraden geändert wird. Dreht man dagegen den Körper um diese Linie als um eine Axe, oder bewegt ihn parallel mit sich fort, so streben die zwei Kräfte den also verrückten Körper weder in seine anfängliche Lage zurückzuführen, noch von derselben noch mehr zu entfernen; das Gleichgewicht bleibt unverändert.

d. Wenn die zwei Angriffspunkte zusammenfallen, also die zwei Kräfte auf einen und denselben Punkt des Körpers wirken, so wird ihr Gleichgewicht durch keinerlei Verrückung aufgehoben; ein solches Gleichgewicht wollen wir ein dauerndes nennen.

§. 158.

Das in den zwei vorigen §§. behandelte Beispiel von der Sicherheit des Gleichgewichts, das einfachste, welches sich aufstellen lässt, wird uns zugleich als Grundlage für alle andern Fälle dienen, indem wir mit Hülfe der in den vorhergehenden Kapiteln vorgetragenen Theorieen von dem Mittelpunkte der Kräfte und den Axen des Gleichgewichts jedes zusammengesetztere

System auf ein System von nur zwei Kräften zurückführen werden. Wir wollen auch hier dieselbe Ordnung befolgen, in welcher jene Theorieen entwickelt worden sind, und daher zuerst die Sicherheit eines Systems paralleler Kräfte in Untersuchung nehmen.

Seyen $P, P', P'', \ldots$ mehrere mit einander parallel auf einen Körper wirkende und sich das Gleichgewicht haltende Kräfte; $A, A', A'', \ldots$ ihre Angriffspunkte. Man suche von allen Kräften, die eine P ausgenommen, den Mittelpunkt, welcher A_2 sey, so sind, wie auch der Körper verrückt werden mag, die Kräfte $P', P'', \ldots$ immer gleichwirkend mit einer einzigen in A_2 angebrachten Kraft $P_2 = P' + P'' + \ldots = -P$; folglich alle Kräfte des Systems $P, P', P'', \ldots$ bei jeder Verrückung gleichwirkend mit den zwei Kräften P und P_2, deren Angriffspunkte A und A_2 sind. Mithin wird auch das Gleichgewicht zwischen $P, P', P'', \ldots$ sicher oder unsicher seyn, jenachdem es das Gleichgewicht zwischen P und P_2 ist, jenachdem also die Richtung von A_2 nach A mit der Richtung von P einerlei oder ihr entgegengesetzt ist.

Denken wir uns z. B. unter $P', P'', \ldots$ die Wirkungen der Schwerkraft auf die einzelnen Theile eines Körpers, und ist daher A_2 der Schwerpunkt und P_2 das Gewicht des Körpers (§. 110.), P aber die der Schwerkraft direct entgegen, also nach oben zu, wirkende und den Körper vor dem Fallen schützende Kraft, so muss A_2A nach oben gerichtet seyn, und folglich der Angriffspunkt von P über dem Schwerpunkte liegen, wenn das Gleichgewicht sicher seyn und sich bei einer Verrückung des Körpers von selbst wieder herstellen soll.

§. 159.

Um einen mehr symmetrischen Ausdruck für die Bedingung der Sicherheit des Gleichgewichts zwischen parallelen Kräften zu erhalten, wollen wir die Kräfte parallel mit der Axe der z eines beliebigen recht- oder schiefwinkligen Coordinatensystems nehmen und daher durch $(0, 0, Z)$, $(0, 0, Z')$, $(0, 0, Z'')$, etc. ausdrücken. Ihre Angriffspunkte seyen (x, y, z), (x', y', z') etc. Alsdann ist erstens wegen des Gleichgewichts (§. 73. Zus.):

$$\Sigma Z = 0,\ \Sigma x Z = 0,\ \Sigma y Z = 0, \text{ oder}$$
$$Z + \Sigma Z' = 0,\ xZ + \Sigma x'Z' = 0,\ yZ + \Sigma y'Z' = 0.$$

Sodann ist von den Kräften Z', Z'', ... die Resultante:

$$P_2 = \Sigma Z' = -Z$$

und die Coordinaten ihres Mittelpunktes A_2 sind (§. 108.)

$$x_2 = \frac{\Sigma x'Z'}{\Sigma Z'},\ y_2 = \frac{\Sigma y'Z'}{\Sigma Z'},\ z_2 = \frac{\Sigma z'Z'}{\Sigma Z'},$$

von denen sich, mittelst der vorhergehenden Gleichungen, x_2 und y_2 resp. $= x$ und y finden. A_2 liegt daher, wie gehörig, mit dem Punkte A oder (x, y, z) in einer den Kräften parallelen Geraden, und es ist

$$AA_2 = z_2 - z = -\frac{\Sigma z'Z'}{Z} - z = -\frac{\Sigma zZ}{Z},$$

folglich $AA_2.P_2 = -AA_2.Z = \Sigma zZ$.
Das Gleichgewicht ist demnach sicher, dauernd, oder unsicher, jenachdem ΣzZ positiv, null, oder negativ ist.

Da das Product $AA_2.P_2$ unabhängig von der Lage der Ebene der x, y ist, und mithin auch die Summe ΣzZ sich nicht ändert, wie auch diese Ebene gelegt werden mag, so können wir das erhaltene Resultat folgendergestalt in Worte fassen:

Wenn man bei einem Systeme von parallelen Kräften, welche im Gleichgewichte sind, die Richtungen der Kräfte durch eine Ebene schneidet und jede Kraft in den von dem Durchschnitte mit der Ebene bis zu ihrem Angriffspunkte genommenen Theil ihrer Richtung multiplicirt, so ist die algebraische Summe dieser Producte für jede Lage der Ebene von einerlei Grösse, und jenachdem sich diese Summe positiv, null, oder negativ findet, ist das Gleichgewicht sicher, dauernd, oder unsicher.

§. 160.

Ein System von Kräften, welche in einer Ebene nach beliebigen Richtungen wirken und sich das Gleichgewicht halten, wird bei Drehung der Ebene in sich selbst gleichwirkend mit einem Paare von Kräften P_1 und P_2, deren Angriffspunkte A_1 und A_2 willkührlich in der Ebene genommen werden können, deren Richtungen und Intensitäten aber dadurch bestimmt werden, dass P_1 und P_2 vor der Drehung einander ebenfalls das Gleichgewicht halten, und dass $A_1A_2.P_2$ und $k_1 = \Sigma(xX + yY)$, d. i. die Momente des Paares und des Systems nach einer Drehung der Ebene um 270° oder —90°, einander gleich sind (§. 124.). Wegen der stets gleichen Wirkung des Paares und des Systems hat nun auch das Gleichgewicht des Systems einerlei Beschaffenheit mit dem Gleichgewichte von P_1 und P_2, und es ist daher das Gleichgewicht des Systems in Bezug auf eine solche Verrückung des Körpers, bei welcher die Ebene, in der die Kräfte wirken, sich parallel bleibt, sicher, dauernd, oder unsicher, jenachdem $A_1A_2.P_2$, d. i. $\Sigma(xX + yY)$, positiv, null, oder negativ ist.

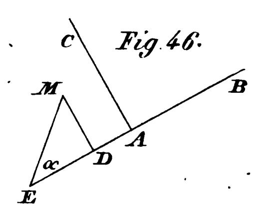
Zusatz. Der Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen des Productes $A_1A_2.P_2$ und der Beschaffenheit des Gleichgewichts von P_1 und P_2 lässt sich noch folgendergestalt nachweisen.

Nach einer Drehung der Ebene um 90° verwandeln sich die zwei auf A_1 und A_2 wirkenden und sich anfangs das Gleichgewicht haltenden Kräfte P_1 und P_2 in ein Paar, dessen Moment $= -A_1A_2.P_2$ ist. Es ist nämlich A_1A_2 die Breite des Paares, und wenn P_2 anfangs die Richtung A_1A_2, also mit der Linie A_1A_2 einerlei Zeichen hat, so ist, wie die Anschauung lehrt, der Sinn des durch Drehung der Ebene entstandenen Paares dem Sinne der Drehung selbst entgegengesetzt, mithin das Moment des Paares negativ. In diesem Falle, wo das Product $A_1A_2.P_2$ positiv ist, suchen die Kräfte die Ebene zurückzudrehen, und das anfängliche Gleichgewicht war folglich sicher.

Auf gleiche Weise zeigt sich, dass bei einem negativen Werthe dieses Products das Gleichgewicht unsicher ist.

§. 161.

Die Summe $h_, = \Sigma(xX + yY)$, lässt sich auch sehr einfach geometrisch darstellen. Sie ist das Moment des Systems, nachdem die Ebene in sich um $-90°$ gedreht worden, und zwar das Moment für einen beliebigen Punkt der Ebene, da das System nach der Drehung mit einem Paare gleiche Wirkung hat. Nach §. 115. ist aber dieses Moment einerlei mit dem Momente des Systems, welches entsteht, wenn man die Ebene unbewegt lässt, und jede Kraft, wie AB (Fig. 46.) um ihren Angriffspunkt A um $+90°$ dreht. Sey AC die Lage, in welche AB hierdurch gebracht wird. In Bezug auf den Punkt M der Ebene ist das Moment



von AC, $= 2.MAC = 2.DAC$, wenn MD ein von M auf AB gefälltes Perpendikel ist (§. 45. 4.). Nun verhält sich

$$DAC : ABC = DA : AB \text{ (§. 45. 1.)},$$

und es ist der Dreiecksausdruck ABC positiv, weil der Sinn, nach welchem sich die Seite AB um A drehen muss, um in die Lage AC zu kommen und damit die Fläche des Dreiecks zu beschreiben, einerlei mit dem vorhin bei der Drehung um 90° als positiv angenommenen Sinne ist (§. 34. zu Ende). Das Dreieck DAC ist daher positiv oder negativ, nachdem DA und AB einerlei oder entgegengesetzte Richtungen haben, und es ist folglich auch dem Zeichen nach das Moment von AC, $= 2.DAC = DA.AB$. Fällt man daher auf die Kräfte AB, $A'B'$, ... des Systems von einem beliebigen Punkte M der Ebene Perpendikel MD, MD', ..., so ist $\Sigma DA.AB =$ dem Momente des Systems, nachdem jede Kraft um 90° gedreht worden, $= h$.

Man ziehe noch von M an die Richtungen AB, $A'B'$, ... gerade Linien, welche sie resp. in E, E', ... treffen und daselbst mit ihnen nach einerlei Seite einander gleiche Winkel $= \alpha$ machen, so dass, wenn man diese Winkel um den gemeinschaftlichen Punkt M ihrer Schenkel ME, ME', ... dreht, bis diese Schenkel in eine Gerade fallen, die andern Schenkel AB, $A'B'$, ... einander parallel werden. Demzufolge sind die Dreiecke MED, $ME'D'$, ... einander ähnlich, und es verhalten sich die ED zu den entsprechenden DM, also auch die Producte $ED.AB$ zu den $DM.AB$, wie 1 zu tang α, folglich auch

$$\Sigma ED.AB : \Sigma DM.AB = 1 : \text{tang } \alpha.$$

Dadurch wird $\Sigma EA.AB = \Sigma ED.AB + \Sigma DA.AB$
$= \text{cotang}\, \alpha . \Sigma DM.AB + \Sigma DA.AB$
$= 2 \text{ cotang}\, \alpha . \Sigma MAB + h.$

Ist nun das System anfänglich im Gleichgewichte, so ist für jeden Ort von M, $\Sigma MAB = 0$, folglich die Summe $\Sigma EA.AB = h$, also von α unabhängig. Findet aber kein Gleichgewicht statt, so ist ΣMAB nicht $=0$, wenigstens nicht für jeden Ort von M, also $\Sigma EA.AB$ von α abhängig. Hiermit noch die Eigenschaften der Summe h in Verbindung gesetzt, erhalten wir folgenden mit dem für parallele Kräfte in §. 159. gefundenen ganz analogen Satz:

Hat man ein System von Kräften in einer Ebene, und zieht man von einem Punkte M der Ebene an die Richtungen der Kräfte gerade Linien, welche die Richtungen nach einerlei Seite zu unter einander gleichen Winkeln $=\alpha$ schneiden, so ist, wenn sich die Kräfte das Gleichgewicht halten, und nur dann, die Summe der Producte aus jeder Kraft in den Theil ihrer Richtung, welcher sich vom Durchschnitte mit der an sie gezogenen Geraden bis zum Angriffspunkte der Kraft erstreckt, eine bei jeder Lage von M und bei jedem Werthe von α sich gleichbleibende Grösse, und nachdem diese Grösse positiv, null, oder negativ ist, ist das Gleichgewicht sicher, dauernd, oder unsicher.

---

§. 162.

Bei der jetzt angestellten Untersuchung über die Sicherheit des Gleichgewichts zwischen Kräften, die in einer Ebene enthalten sind, berücksichtigten wir bloss solche Verrückungen des Körpers, wodurch die Lage

dieser Ebene nicht geändert wurde, also Drehungen des Körpers um eine auf der Ebene normale Axe. Die in Bezug auf eine solche Axe statt findende Beschaffenheit gilt aber im Allgemeinen nicht auch für jede andere auf der Ebene nicht normale Axe, so dass von zwei Axen, welche einen Winkel mit einander machen, das Gleichgewicht rücksichtlich der einen sicher seyn kann, während es in Bezug auf die andere unsicher ist.

Bestehe das System z. B. aus 4 Kräften P, P', Q, Q', welche, in einer Ebene wirkend, im Gleichgewichte sind. Dabei seyen P und P' für sich im Gleichgewichte, folglich auch Q und Q'; ersteres Gleichgewicht, für sich betrachtet, sey sicher, letzteres unsicher. Sind nun resp. A, A', B, B' die Angriffspunkte dieser 4 Kräfte, und wird der Körper um AA', als um eine Axe, gedreht, so bleibt das Gleichgewicht zwischen den Kräften P, P', welche in der Linie AA' wirken, unverändert, und die Kräfte Q, Q' verwandeln sich in ein Paar, welches den Körper noch mehr aus seiner anfänglichen Lage zu bringen strebt. Dreht man dagegen den Körper um BB', so dauert das Gleichgewicht zwischen Q, Q' fort, die Kräfte P, P' aber bemühen sich, den Körper in seine erste Lage wieder zurückzuführen. Das Gleichgewicht zwischen den 4 Kräften ist daher in Bezug auf die erstere Drehung unsicher, in Bezug auf die letztere sicher. Uebrigens sieht man von selbst, dass die hierbei gemachte Bedingung, dass sämmtliche 4 Kräfte in einer Ebene wirken, keine wesentliche ist.

So wie dem jetzt betrachteten Systeme von Kräften nach der Verschiedenheit der Verrückung des Körpers Sicherheit und Unsicherheit zugleich zukommen kann,

so gilt dieses, wenige specielle Fälle ausgenommen, unter denen ein System paralleler Kräfte der merkwürdigste ist, auch von jedem andern Systeme. Den Inhalt der nächstfolgenden §§. soll daher eine ganz allgemeine Untersuchung der Merkmale ausmachen, aus denen bei Kräften, die nach beliebigen Richtungen auf einen frei beweglichen Körper wirken und im Gleichgewichte sind, die Sicherheit oder Unsicherheit dieses Gleichgewichts für eine gegebene Verrückung des Körpers erkannt werden kann, — eine Untersuchung, die durch die §§. 135. und 136. im vorigen Kapitel vollkommen eingeleitet ist.

§. 163.

Jede Verrückung eines Körpers lässt sich in eine parallele Fortbewegung und eine Drehung desselben um eine gewisse Axe zerlegen (§. 130.). Durch die parallele Bewegung wird das Gleichgewicht nicht gestört, wohl aber im Allgemeinen durch die Drehung, und wir haben daher auch gegenwärtig, wo die Sicherheit untersucht werden soll, nur den zweiten Theil der Verrückung oder die Drehung in Betracht zu ziehen.

Nun sahen wir in §. 136. *c*., dass, sobald der Körper um eine Axe gedreht wird, die vorher im Gleichgewichte befindlichen Kräfte gleichwirkend mit einem Paare werden, dessen Kräfte $-P_1$ und $-P_2$ man, eben so wie die Kräfte des Systems, auf zwei bestimmte Punkte A_1 und A_2 des Körpers mit sich gleichbleibender Richtung und Stärke wirkend setzen kann. Jenachdem folglich das anfängliche Gleichgewicht zwischen diesen zwei Kräften sicher oder unsicher ist, jenach dem also $-P_2.A_1A_2$ eine positive oder negative

Grösse ist, wird auch dem Gleichgewichte des Systems Sicherheit oder Unsicherheit beizulegen seyn.

Es ist aber nach den Formeln (a), (h), (d), (e) in §. 135:

$$-P_2 . A_1 A_2 = -r P_2 = -Q$$
$$= \frac{D^2}{-D(\alpha\varphi + \beta\chi + \gamma\psi)},$$

von welchem Bruche der Zähler

$$= (f\varphi - G\psi - H\chi)^2 + (g\chi - H\varphi - F\psi)^2$$
$$+ (h\psi - F\chi - G\varphi)^2,$$

also immer positiv, und nur dann $= 0$ ist, wenn $f\varphi = G\psi + H\chi$, $g\chi = H\varphi + F\psi$, $h\psi = F\chi + G\varphi$ ist, also nur in dem speciellen Falle, wenn das System eine Axe des Gleichgewichts hat und um diese gedreht wird. Der Nenner des Bruches findet sich

$$= (f\varphi - G\psi - H\chi)\varphi + (g\chi - H\varphi - F\psi)\chi$$
$$+ (h\psi - F\chi - G\varphi)\psi$$

und werde mit S bezeichnet. Das Gleichgewicht eines durch F, G, H, f, g, h (§. 127. (4) und (7)) gegebenen Systems ist demnach bei der Drehung um eine durch φ, χ, ψ ihrer Richtung nach gegebene Axe sicher oder unsicher, jenachdem die mit S bezeichnete Function dieser Grössen einen positiven oder negativen Werth hat.

§. 164.

Lassen wir die Drehungsaxe parallel mit der Axe der x seyn, so werden $\varphi = 0$, $\chi = 0$, $\psi = 1$, und damit $S = h = \Sigma(xX + yY)$, welches uns in Verbindung mit §. 160. folgenden Satz giebt:

Das Gleichgewicht zwischen Kräften, die nach beliebigen Richtungen auf einen frei beweglichen Kör-

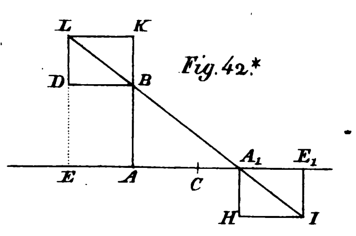
per wirken, ist bei Drehung des Körpers um eine Axe sicher oder unsicher, jenachdem es bei der Drehung um dieselbe Axe das Gleichgewicht zwischen den Projectionen der Kräfte auf eine die Axe rechtwinklig schneidende Ebene ist.

Es dürfte der Mühe nicht unwerth seyn, zu untersuchen, wie dieses einfache Resultat auch ohne Hülfe des obigen zusammengesetzten Ausdrucks für S aus einfachen geometrischen Betrachtungen hergeleitet werden kann.

1) Sey AB (Fig. 42.), wie in §. 133., die Axe der Drehung, welche man sich, wie dort, vertical denke, MN eine horizontale, die Axe in A schneidende Ebene und PQ eine der Kräfte des Systems, welche sich das Gleichgewicht halten. Für PQ, und eben so für jede andere Kraft des Systems, substituire man ihre horizontale Projection TU, das in einer verticalen Ebene gelegene Paar horizontaler Kräfte PR, TO und die verticale Kraft PS.

2) Da die Angriffspunkte P, T der Kräfte jedes Paares PR, TO in einer Verticalen liegen, so kann man nach §. 136. *e.* für jedes dieser Paare ein anderes setzen, dessen Kräfte ebenfalls horizontal sind und ihre Angriffspunkte in zwei beliebigen Stellen, z. B. in A und B, der verticalen Axe haben. Sind demnach die horizontalen AC, BD (Fig. 42.*) die Resultanten dieser auf A und B wirkenden Kräfte, so bilden diese Resultanten ein Paar, welches mit sämmtlichen Paaren PR, TO gleichwirkend ist.

3) Die Kräfte TU in der horizontalen Ebene sind vor der Drehung für sich im Gleichgewichte (§. 133), und man kann daher, wenn der Körper um AB gedreht werden soll, statt aller dieser Kräfte zwei einander



gleiche und direct entgegengesetzte in der Ebene substituiren, wobei nur erfordert wird, dass das Product aus der einen in den Abstand ihres Angriffspunktes von dem der andern = dem Moment der Kräfte *TU* ist, nachdem jede der letztern um ihren Angriffspunkt um 90° in der Ebene gedreht worden (§. 124. u. 161.). Da hiernach von den zwei für *TU* zu setzenden Kräften die eine nebst ihrem Angriffspunkte willkührlich genommen werden kann, so sey *A* der Angriffspunkt der einen und sie selbst, durch *AE* vorgestellt, sey der *AC* gleich und entgegengesetzt; hiermit finde sich A_1, als der Angriffspunkt der andern Kraft A_1E_1, $= AC$. Anfangs und auch während der Drehung sind daher *AE* und *AC* im Gleichgewichte und können folglich weggelassen werden. Die Paare *PR*, *TO* und die Kräfte *TU* sind demnach fortwährend gleichwirkend mit dem Paare A_1E_1, *BD*.

4) Was noch die verticalen Kräfte *PS* anlangt, so müssen sie zu ihrer Resultante ein Paar haben, welches mit dem vorigen A_1E_1, *BD* anfänglich das Gleichgewicht hält. Ist daher von allen verticalen Kräften, die eine *PS* selbst ausgenommen, der Mittelpunkt P_1 und die Resultante P_1S_1, so bilden *PS* und P_1S_1 dieses resultirende Paar. Die Ebene desselben ist wegen des Gleichgewichts anfänglich mit der Ebene *ABC* parallel, und es hat, wie auch der Körper verrückt werden mag, mit den verticalen Kräften immer gleiche Wirkung.

Statt dieses Paares kann aber jedes andere gesezt werden, das mit ihm anfänglich gleichwirkend ist, und dessen Kräfte ebenfalls vertical sind. Denn wenn zwei Paare, aus verticalen Kräften bestehend, einander gleiche Wirkung haben, und wenn der Körper, an wel-

chem sie angebracht sind, um eine verticale Axe gedreht wird, so bleiben sie gleichwirkend, da durch eine solche Drehung die gegenseitige Lage ihrer Kräfte nicht geändert wird.

Für das Paar PS, P_1S_1, dessen Kräfte in einer mit ABC parallelen Ebene vertical wirken, kann man daher ein anderes setzen, dessen Kräfte in A_1 und B selbst angebracht sind. Seyen A_1H und BK diese Kräfte, und sey von A_1E_1, AH die Resultante A_1I, und von BD, BK die Resultante BL, so sind sämmtliche Kräfte des Systems bei der Drehung um AB stets gleichwirkend mit A_1I und BL. Wegen des anfänglichen Gleichgewichts müssen aber letztere Kräfte anfangs einander direct entgegengesetzt seyn, daher man die zu ihrer Bestimmung dienenden Punkte auch geradezu findet, indem man durch E_1 und D Verticalen legt, welche A_1B in I und L schneiden werden.

5) Nachdem somit die Kräfte des Systems rücksichtlich einer Drehung um AB auf A_1I und BL reducirt worden, ist nun das Gleichgewicht des Systems in Bezug auf dieselbe Drehung sicher oder unsicher, nachdem es das Gleichgewicht zwischen A_1I und BL ist, also nachdem $A_1B.BL$ positiv oder negativ, folglich auch, weil A, E die Projectionen von B, L auf die horizontale Ebene sind, nachdem $A_1A.AE$ positiv oder negativ ist, d. h. nachdem das Gleichgewicht zwischen den Projectionen TU der Kräfte des Systems auf eine die Drehungsaxe rechtwinklig schneidende Ebene sicher oder unsicher ist.

§. 165.

Zusätze. *a.* Dass die Sicherheit des Gleichgewichts des Systems bloss von der Sicherheit des Gleich-

gewichts zwischen AE und A_1E_1, oder des Gleichgewichts zwischen den Projectionen der Kräfte auf die Ebene MN abhängt, erhellet auch folgendergestalt. — Die Kräfte des Systems wurden in die horizontalen Kräfte TU, in die Paare PR, TO und in die verticalen Kräfte PS zerlegt, und diese drei einzelnen Systeme waren resp. gleichwirkend mit den drei Paaren AE; A_1E_1; AC, BD; A_1H, BK. Von diesen streben das zweite und dritte, sowohl anfangs, als auch während der Drehung um AB, die Axe AB selbst aus ihrer Lage zu bringen, nicht aber den um die Axe aus seiner anfänglichen Lage gedrehten Körper noch weiter vorwärts oder zurück zu drehen. Eine solche Drehung um die Axe können bloss die Kräfte AE, A_1E_1 bewirken, und diese sind es daher auch allein, von denen die Sicherheit des Gleichgewichts des ganzen Systems abhängt.

b. Wenn demnach das Gleichgewicht zwischen den horizontalen Kräften TU sich dauernd findet, und daher diese Kräfte ganz weggelassen werden können, mithin die Kräfte des Systems sich nur auf die zwei Paare AC, BD und A_1H, BK reduciren, so kann man das Gleichgewicht des Systems weder sicher noch unsicher nennen. Es ist aber auch nicht dauernd, da jene zwei Paare bei der Drehung die Axe selbst aus ihrer Lage zu bringen streben. Dieser specielle Fall begründet daher eine neue Art von Gleichgewicht, welches ich, um doch einen Ausdruck dafür zu haben, neutrales Gleichgewicht nennen will.

Wollte man bei einem solchen Gleichgewichte für alle Kräfte des Systems nur zwei substituiren, so müssten diese unendlich gross und mit der Axe der Drehung selbst parallel seyn. Denn jemehr sich das Gleichge-

wicht zwischen den TU dem dauernden Zustande nähert, und wenn immer, wie vorhin, $A_1E_1 = -AE = AC$ genommen wird, desto näher rückt A_1 dem A. Desto mehr nähert sich folglich A_1B der verticalen Lage, und $BL = -A_1I = \frac{A_1B}{A_1A}.BD$ wächst ohne Ende.

Aendert sich das System allmählig so, dass der Punkt A_1 in der Linie AC durch A von der einen auf die andere Seite von A geht, so verwandelt sich das Gleichgewicht in ein unsicheres, wenn es vorher sicher war, und umgekehrt. So wie man daher von dem Positiven zum Negativen auf doppeltem Wege gelangen kann, das einemal durch Null und das anderemal durch das unendlich Grosse, so giebt es auch zwei Uebergänge vom sichern zum unsichern Gleichgewichte. Der eine ist das dauernde Gleichgewicht, wo gar keine Kräfte, und der andere das neutrale Gleichgewicht, wo zwei unendlich grosse Kräfte hinzuzufügen nöthig sind, wenn das Gleichgewicht bei Drehung des Körpers nicht verloren gehen soll.

c. Bei einer Drehung um eine überhaupt durch φ, χ, ψ gegebene Axe wird das Gleichgewicht des Systems neutral seyn, wenn die in §. 162. 3. mit S bezeichnete Function $= 0$, und nicht zugleich $D = 0$ ist, d. h. wenn nicht zugleich das System eine Axe des Gleichgewichts hat, und um diese der Körper gedreht wird. Denn hiermit wird $Q = P_2.A_1A_2 = \infty$, also jede der beiden mit dem Systeme bei der Drehung gleichwirkenden Kräfte unendlich gross, und vermöge der aus (h) und (i) in §. 135. fliessenden Formel: $D^2 = Q^2(1 - x^2)$, $x = 1$, also der Winkel, dessen Cosinus x ist, $= 0$, d. h. die Linie, in welcher diese zwei Kräfte anzubringen sind, wird mit der Axe der Drehung

parallel (§. 136. *b.*); — übereinstimmend mit dem Vorigen.

§. 166.

Wie schon im §. 162. vorläufig bemerkt worden, kann das Gleichgewicht eines und desselben Systems von Kräften nach der verschiedenen Lage der Axe, um welche der Körper gedreht wird, bald sicher, bald unsicher seyn. Dasselbe giebt auch die den jedesmaligen Zustand des Gleichgewichts bestimmende Function

$$S = f\varphi^2 + g\chi^2 + h\psi^2 - 2F\chi\psi - 2G\psi\varphi - 2H\varphi\chi$$

zu erkennen, die nach den verschiedenen Werthen, welche man den die Richtung der Axe bestimmenden Grössen φ, χ, ψ beilegt, während F, G, ... h unverändert bleiben, im Allgemeinen bald positiv, bald negativ ist. Um uns darüber näher zu unterrichten, wollen wir diese Function zuvor auf eine einfachere Form bringen. — Es ist

$$f\varphi^2 - 2G\psi\varphi - 2H\varphi\chi = f(\varphi^2 - 2\,\frac{G\psi + H\chi}{f}\,\varphi)$$
$$= f\varphi'^2 - \frac{(G\psi + H\chi)^2}{f}$$

wenn man

$$f\varphi - G\psi - H\chi = f\varphi' \text{ setzt. Hiermit wird}$$
$$fS = f^2\varphi'^2 - g'\psi^2 - h'\chi^2 - 2F'\chi\psi,$$

wo zur Abkürzung

$$G^2 - hf = g',\ H^2 - fg = h',\ Ff + GH = F'$$

gesetzt sind. — Ferner ist

$$h'\chi^2 + 2F'\chi\psi = h'\,(\chi + \frac{F'}{h'}\,\psi)^2 - \frac{F'^2}{h'}\,\psi^2.$$

Sey daher noch

$h'\chi + F'\psi = h'\chi'$ und $F'^2 - g'h' = f''$, so wird

$$S = f\varphi'^2 - \frac{h'}{f}\chi'^2 + \frac{f''}{fh'}\psi^2,$$

und es ist somit S durch Einführung der Veränderlichen φ', χ' statt φ, χ, als ein Aggregat von drei Quadraten dargestellt.

Da nun nach der verschiedenen Lage der Drehungsaxe die Werthe von φ, χ, ψ, und daher auch die von φ', χ', ψ, in allen möglichen Verhältnissen zu einander stehen können, so ist S immer positiv, und folglich das Gleichgewicht für jede Drehungsaxe sicher, wenn f, $-h'$ und $-f''$ zugleich positiv sind. Dagegen ist S immer negativ, und das Gleichgewicht für jede Axe unsicher, wenn f, h', f'' negativ sind. Das Gleichgewicht ist demnach für jede Axe von einerlei Beschaffenheit, wenn h' und f'' negativ sind, und zwar ist es sicher oder unsicher, nachdem f positiv oder negativ ist.

§. 167.

Auf analoge Art, wie g', h', F', f'' aus $f, \ldots H$ abgeleitet worden sind, bilde man noch f', G', H', g'', h'', so dass überhaupt

(1) $f' = F^2 - gh$, (4) $F' = Ff + GH$, (7) $f'' = F'^2 - g'h'$,
(2) $g' = G^2 - hf$, (5) $G' = Gg + HF$, (8) $g'' = G'^2 - h'f'$,
(3) $h' = H^2 - fg$, (6) $H' = Hh + FG$, (9) $h'' = H'^2 - f'g'$.

Substituirt man in 7) für g', h', F' ihre Werthe aus 2), 3), 4), so kommt:

$$(10)\; f'' = Rf, \text{ wo}$$
$$R = F^2f + G^2g + H^2h + 2FGH - fgh$$

die symmetrische Function von $f, \ldots H$ ist, welche, $= 0$ gesetzt, die Bedingung für das Vorhandenseyn einer Gleichgewichtsaxe ausdrückt (§. 131.).

Eben so erhält man:

$$(11)\ g'' = Rg, \quad (12)\ h'' = Rh.$$

Sind nun h' und f'' negativ (vor. §.), so ist nach (7) auch g' negativ, und daraus, dass g', h' negativ sind, folgt nach (2) und (3), dass den f, g, h einerlei Zeichen zukommen. Nach (10), (11), (12) müssen daher auch g'', h'' mit f'' einerlei Zeichen, also das negative, haben, woraus wegen (8) oder (9) noch folgt, dass eben so, wie g', h', auch f' negativ ist.

Hiernach und wegen der Symmetrie in der Bildung der Grössen $f'' \ldots h'$ schliessen wir:

Wenn von den sechs Grössen f', g', h', f'', g'', h'' eine der drei erstern (z. B. h') und eine ihr nicht entsprechende der drei letztern (z. B. f'') negativ sind, so sind es auch die vier übrigen, und f, g, h haben einerlei Zeichen. Das Gleichgewicht ist alsdann bei jeder Verrückung des Körpers von einerlei Beschaffenheit, und zwar sicher oder unsicher, jenachdem das gemeinschaftliche Zeichen von f, g, h das positive oder negative ist.

§. 168.

Zusatz. Zwischen den Grössen $F, \ldots H'$ und $f, \ldots h''$ finden noch einige andere bemerkenswerthe Relationen statt. Um sie zu erhalten, wollen wir zu den Gleichungen (d) in §. 135.

$$(d)\begin{cases} -f\varphi + H\chi + G\psi = D\alpha, \\ H\varphi - g\chi + F\psi = D\beta, \\ G\varphi + F\chi - h\psi = D\gamma \end{cases}$$

zurückkehren, welche α, β, γ durch φ, χ, ψ ausdrücken, und daraus umgekehrt φ, χ, ψ durch α, β, γ auszudrücken suchen. In der That folgt aus diesen Gleichun-

gen, wenn man sie, um χ und ψ zu eliminiren, mit a, b, c multiplicirt, hierauf addirt und zur Bestimmung von $a:b:c$

$$aH - bg + cF = 0,$$
$$aG + bF - ch = 0 \text{ setzt:}$$
$$(-af + bH + cG)\varphi = D(a\alpha + b\beta + c\gamma).$$

Es fliesst aber aus den zwei ersten dieser Gleichungen:

$$a : b : c = -f' : H' : G',$$

folglich wenn man diese Verhältnisswerthe von a, b, c in der dritten substituirt:

$$(A) \quad (ff' + HH' + GG')\varphi = D(-f'\alpha + H'\beta + G'\gamma).$$

Substituirt man sie in den zwei ersten selbst, so kommen die identischen Gleichungen:

$$-Hf' - gH' + FG' = 0, \quad -Gf' + FH' - hG' = 0.$$

und ähnliche identische Gleichungen erhält man bei der Elimination von ψ, φ und φ, χ aus (d).

Nun wird, vermöge (A), $ff' + GG' + HH' = 0$, wenn α, β, γ null sind. Unter derselben Voraussetzung ist daher die Function $ff' + \ldots$, $= 0$ gesetzt, das Resultat der Elimination von φ, χ, ψ aus (d), d. i. aus den Gleichungen (8) in §. 127. Sie muss daher, bis auf das Zeichen wenigstens, einerlei mit der in §. 131. (16) gefundenen und vorhin mit R bezeichneten symmetrischen Function von $F, \ldots h$ seyn. In der That findet sie sich auch dem Zeichen nach von R nicht verschieden, also

$$ff' + GG' + HH' = R, \text{ und eben so wegen der Symmetrie}$$
$$gg' + HH' + FF' = R,$$
$$hh' + FF' + GG' = R.$$

Hiernach wird:

$$(d^*)\begin{cases} -f'\alpha + H'\beta + G'\gamma = R\varphi : D, \\ H'\alpha - g'\beta + F'\gamma = R\chi : D, \\ G'\alpha + F'\beta - h'\gamma = R\psi : D, \end{cases}$$ und eben so kommt:

nach Elimination von ψ, φ und von φ, χ aus (d).

Diese Gleichungen lassen sich aber aus den vorigen (d) unmittelbar bilden, wenn man α, β, γ mit φ, χ, ψ gegenseitig vertauscht, $F, \ldots h$ in $F', \ldots h'$ und D in $R:D$ verwandelt. Es muss daher auch seyn, indem man auf dieselbe Weise mit den Gleichungen (d^*) verfährt und die eben so aus $F', \ldots h'$ gebildete Function, welche R von $F, \ldots h$ war, $= R'$ setzt, also für $R:D$, $R':(R:D)$ schreibt, und wenn $F'', \ldots h''$ dieselben Functionen von $F', \ldots h'$, bedeuten, welche $F', \ldots h'$ von $F, \ldots h$ sind:

$$(d^{**})\begin{cases} -f''\varphi + H''\chi + G''\psi = R'D\alpha : R, \\ H''\varphi - g''\chi + F''\psi = R'D\beta : R, \\ G''\varphi + F''\chi - h''\psi = R'D\gamma : R. \end{cases}$$

Wegen der Unabhängigkeit je zweier der drei Grössen φ, χ, ψ von einander müssen nun die Coefficienten derselben und der davon abhängigen α, β, γ in den Gleichungen (d^{**}) in denselben Verhältnissen zu einander stehen, als wie in (d), folglich:

$$f'' : f = H'' : H = G'' : G = \text{etc.} = R' : R.$$

Durch Elimination von f' aus den zwei Gleichungen:

$$R = ff' + HH' + GG'$$
$$0 = -Hf' - gH' + FG'$$

folgt aber: $RH = h'H' + F'G' = H''$.

Es ist daher:

$$R' = R^2 \text{ und } f'' = Rf, \text{ etc. } F'' = RF, \text{ etc.}$$

§. 169.

Wenn die in §. 167. zu Ende bemerkten Bedingungen nicht erfüllt werden, so kann S (§. 166.) nach der verschiedenen Annahme von φ, χ, ψ bald positiv, bald negativ, und folglich auch null werden. Alsdann bilden die durch die Gleichung $S=0$ bestimmten Axen, sobald sie durch einen und denselben Punkt, z. B. den Anfangspunkt der Coordinaten, gelegt werden, eine Kegelfläche des zweiten Grades, deren Spitze dieser Punkt ist, und deren Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten man erhält, wenn man in der Gleichung $S=0$ diese Coordinaten für die ihnen proportionalen φ, χ, ψ substituirt.

Indem wir nun jetzt, und so auch in den folgenden §§., nur die durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Axen in Betracht ziehen, — denn für je zwei einander parallele Axen ist das Gleichgewicht von einerlei Beschaffenheit (§. 163.), — so ist für jede Axe, welche in die Fläche des Kegels selbst fällt, $S=0$, mithin $Q=\infty$ und das Gleichgewicht neutral (§. 165. *c.*). Für alle innerhalb des Kegels fallende Axen hat S einerlei Zeichen, und das entgegengesetzte für alle Axen, welche ausserhalb des Kegels liegen. Für die einen Axen ist folglich das Gleichgewicht sicher und für die andern unsicher.

So werden demnach in dem allgemeinen Falle, wo das Gleichgewicht bald sicher, bald unsicher ist, die Axen des einen von denen des andern durch eine Kegelfläche gesondert. Ob aber die innerhalb dieser Fläche liegenden Axen, oder ob die ausserhalb liegenden es sind, denen das sichere Gleichgewicht zukommt, lässt sich ohne weiteres nicht entscheiden. Denn behält man die Angriffspunkte und Intensitäten der Kräfte

bei, verändert aber ihre Richtungen in die entgegengesetzten, als wodurch abermals Gleichgewicht entsteht, so gehen die Werthe von $F, \ldots h$ in die eben so grossen, entgegengesetzten über, mithin auch der Werth von S, als einer lineären Function dieser Grössen. Die Gleichung $S = 0$ bleibt daher ungeändert, und folglich auch die Kegelfläche. Bei solchen Werthen von φ, χ, ψ aber, bei welchen S vorher einen positiven Werth hatte, erhält es jetzt einen negativen, und umgekehrt. Wenn folglich beim erstern Gleichgewichte den innerhalb des Kegels fallenden Axen Sicherheit zukam, so gehört sie beim letztern den ausserhalb fallenden, und umgekehrt.

§. 170.

Die Function S, welche hinsichtlich φ, χ, ψ vom zweiten Grade ist, und welche sich nach dem Vorigen im Allgemeinen als ein Aggregat dreier Quadrate darstellen lässt, kann in besondern Fällen auch schon in zwei Quadrate auflösbar seyn. Alsdann muss auch die gleichgeltende Form

$$f\varphi'^2 - \frac{h'}{f}\chi'^2 + \frac{R}{h'}\psi^2,$$

wo die ganze rationale Function R statt des vorigen $f'':f$ geschrieben worden, in zwei Quadrate sich zerlegen lassen. Dieses ist aber wegen der gegenseitigen Unabhängigkeit von φ'^2, χ'^2, ψ^2 nicht anders möglich, als wenn einer der drei Coefficienten f, $-h':f$, $R:h'$ dieser Quadrate null ist. Nun kann nicht der erste $=0$ seyn, indem sonst der zweite $=\infty$ würde, und eben so wenig kann es der zweite seyn, indem damit der dritte $=\infty$ würde. Mithin bleibt nur übrig, den dritten $=0$ zu setzen. Die Bedingung, unter welcher S als ein Aggregat zweier Quadrate ausgedrückt werden kann, ist demnach:

$$R = 0,$$

d. h. das System muss eine Axe des Gleichgewichts haben.

Bei dem jetzt nur aus zwei Quadraten zusammengesetzten Ausdrucke für S

$$S = f\varphi'^2 - \frac{h'}{f}\chi'^2 = \frac{1}{f}(f^2\varphi'^2 - h'\chi'^2)$$

sind nun drei Fälle zu unterscheiden, nachdem nämlich die Coefficienten der zwei Quadrate entweder 1) beide das positive, oder 2) beide das negative, oder 3) einander entgegengesetzte Zeichen haben.

Im ersten Falle ist f positiv und h' negativ; und da, wegen $R = 0$, nach (10) und (11) in §. 167. f'' und g'' null sind, folglich nach (7) und (8), $F'^2 = g'h'$ und $G'^2 = h'f'$ ist, so sind auch g' und f' negativ, und nach (2) und (3), h und g positiv. Alsdann ist für jede Axe das Gleichgewicht sicher, ausgenommen für diejenige, für welche φ' und $\chi' = 0$, d. i.

$$f\varphi - H\chi - G\psi = 0 \text{ und } h'\chi + F'\psi = 0$$

sind. Es ist aber die erste dieser zwei Gleichungen die erste der drei Bedingungsgleichungen (8) in §. 127., wenn die durch φ, χ, ψ bestimmte Axe eine Gleichgewichtsaxe ist; und die zweite, für welche man, weil jetzt $R = 0$, folglich $H'' = H'h' + F'G' = 0$ ist, auch $G'\chi - H'\psi = 0$ setzen kann, entspringt durch Elimination von φ aus der zweiten und dritten jener drei Gleichungen. Die aus $\varphi' = 0$ und $\chi' = 0$ hervorgehenden Verhältnisse zwischen φ, χ, ψ gehören daher der Gleichgewichtsaxe an, die dem Systeme gegenwärtig zukommt. Wird aber die Gleichgewichtsaxe zur Axe der Drehung genommen, so ist das Gleichgewicht dauernd.

Im zweiten Falle sind f und h' zugleich negativ,

womit sich auf ähnliche Art, wie vorhin, auch g, h, f', g' negativ finden. Das Gleichgewicht ist dann für jede Axe unsicher, ausgenommen, wenn φ' und χ' zugleich $=0$ sind, d. i. für die Gleichgewichtsaxe, wo das Gleichgewicht Dauer hat.

Wenn endlich drittens h' positiv ist, und daher, wegen $G'^2 = h'f'$ und $F'^2 = g'h'$, auch f' und g' positiv sind, so lässt sich S in zwei Factoren auflösen:

$$S = \frac{1}{f}\,(f\varphi' + \sqrt{h'}.\chi')\,(f\varphi' - \sqrt{h'}.\chi').$$

Setzt man jeden dieser Factoren für sich $=0$, drückt in ihm φ' und χ' durch φ, χ, ψ aus und substituirt x, y, z für φ, χ, ψ, so erhält man die Gleichungen zweier durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Ebenen. Für die Durchschnittslinie derselben sind beide Factoren zugleich $=0$, also $\varphi' = 0$ und $\chi' = 0$; mithin ist diese Linie die Gleichgewichtsaxe.

Durch die zwei Ebenen wird nun der Raum in vier Theile getheilt, welche paarweise einander gegenüber liegen, und jenachdem die Axe der Drehung in dem einen oder andern dieser Paare enthalten ist, ist das Gleichgewicht sicher oder unsicher. Für Axen, welche in eine der beiden Ebenen selbst fallen, ist das Gleichgewicht neutral, ausgenommen für die mit der Durchschnittslinie der Ebenen zusammenfallende Axe, für welche es Dauer hat.

§. 171.

Es ist jetzt der noch speciellere Fall zu untersuchen übrig, in welchem S sich auf ein einziges Quadrat reducirt. Dies geschieht aber bei dem im vor. §. bereits auf zwei Quadrate zurückgebrachten Ausdrucke für S

nur dann, wenn, nächst der für jenen Ausdruck geltenden Gleichung $R=0$, noch $h'=0$ ist, wodurch

$$S=f\varphi'^2=\frac{1}{f}(f\varphi-H\chi-G\psi)^2$$

wird. Mit $R=0$ werden aber $F'', \ldots h''$ zugleich $=0$, woraus, wenn noch $h'=0$, mittelst der Formeln in §. 167. und 168. leicht zu schliessen, dass auch F', G', H', f', g' null sind. Nach (4) in §. 167. ist alsdann $f=-GH:F$, und S erhält damit den symmetrischen Ausdruck:

$$S=-FGH\left(\frac{\varphi}{F}+\frac{\chi}{G}+\frac{\psi}{H}\right)^2.$$

Gegenwärtig ist also das Gleichgewicht für alle Axen von einerlei Art, und zwar sicher oder unsicher, nachdem das Product FGH negativ oder positiv ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, nachdem f, g, h, die jetzt einerlei Zeichen haben, positiv oder negativ sind. Doch machen hiervon diejenigen Axen eine Ausnahme, für welche $S=0$ ist, und welche daher in der Ebene liegen, deren Gleichung

$$\frac{x}{F}+\frac{y}{G}+\frac{z}{H}=0$$

ist. Denn nach §. 134. sind, unter den jetzt statt findenden Bedingungen $F', G', H'=0$, alle Axen dieser Ebene Axen des Gleichgewichts, und es ist mithin für jede derselben das Gleichgewicht von Dauer.

Zehntes Kapitel.

Von den Maximis und Minimis beim Gleichgewichte.

§. 172.

Das Gleichgewicht zwischen mehrern auf einen frei beweglichen Körper wirkenden Kräften besitzt, wie wir im vorigen Kapitel erkannt haben, die Eigenschaft, dass wenn der Körper um eine Axe, sey es nach der einen oder nach der andern Seite, gedreht wird, während die Kräfte auf ihre Angriffspunkte mit parallel bleibenden Richtungen zu wirken fortfahren, die Kräfte beide Male den Körper entweder der Lage des Gleichgewichts wieder zu nähern, oder beide Male ihn noch mehr von dieser Lage zu entfernen streben. Die Analogie dieser Eigenschaft des Gleichgewichts mit den Merkmalen der grössten und kleinsten Werthe einer veränderlichen Grösse fällt in die Augen. Denn hat man z. B. eine ebene Curve und geht darin, nach welcher Seite man will, von dem Punkte aus, welchem die grösste Ordinate zugehört, so nähert man sich jedesmal der Abscissenlinie, entfernt sich aber von ihr, wenn man den Punkt, dessen Ordinate die kleinste ist, zum Anfangspunkte wählt. Es steht daher zu erwarten, dass auch beim Gleichgewichte eine gewisse Function der das System der Kräfte bestimmenden Grössen ein Maximum oder Minimum seyn werde, und dass, wenn diese Function beim sichern Gleichgewichte z. B. ein Maximum ist, sie beim unsichern als Minimum sich zeigen werde.

§. 173.

In der That ist auch schon bemerkt worden (§. 157. *a*.), dass bei dem Gleichgewichte, welches zwischen zwei einander gleichen und entgegengesetzten Kräften P_1 und P_2 besteht, die Linie A_1A_2, welche die Angriffspunkte der Kräfte verbindet, eine solche Lage haben muss, dass sie, nach der Richtung der Kräfte geschätzt, ihren grösstmöglichen positiven oder negativen Werth hat. Wird nämlich die Richtung von P_2 für die positive genommen, so muss die hiernach geschätzte Linie A_1A_2, d. i. $A_1A_2 \cos(A_1A_2{}^\wedge P_2)$, beim sichern Gleichgewichte ein positives Maximum, beim unsichern ein negatives Maximum oder ein Minimum seyn.

Es ist aber, wenn in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem P_1, P_2 und A_1, A_2 durch (X_1, Y_1, Z_1), $(X_2, \ldots)$ und $(x_1, \ldots)$, $(x_2, \ldots)$ ausgedrückt werden:

$$A_1A_2 . P_2 . \cos(A_1A_2{}^\wedge P_2)$$
$$= (x_2 - x_1)X_2 + (y_2 - y_1)Y_2 + (z_2 - z_1)Z_2$$
$$= x_1X_1 + x_2X_2 + y_1Y_1 + \ldots + z_2Z_2.$$

Mithin ist auch dieser Ausdruck, wenn die Coordinaten der Angriffspunkte dergestalt veränderlich angenommen werden, dass die gegenseitige Entfernung dieser Punkte

$$= \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]}$$

constant bleibt, beim sichern Gleichgewichte ein Maximum und beim unsichern ein Minimum.

Liegen die zwei Kräfte und ihre Angriffspunkte in der Ebene der x, y, und wird der Körper so verrückt, dass die Punkte in dieser Ebene bleiben, so ist es die Function

$$x_1X_1 + x_2X_2 + y_1Y_1 + y_2Y_2,$$

welche beim Gleichgewichte ihren grössten oder kleinsten Werth hat.

§. 174.

So wie wir im vorigen Kapitel nach den Kennzeichen für die Sicherheit des Gleichgewichts eines nur aus zwei Kräften bestehenden Systems die Sicherheit jedes andern Systems beurtheilten, so können wir auch gegenwärtig aus der eben gefundenen Function, welche beim Gleichgewichte zwischen zwei Kräften ein Maximum oder Minimum ist, die entsprechende Function für jedes andere System herleiten.

Ist ein System von Kräften in einer Ebene im Gleichgewichte, und bleibt es darin, auch wenn der Körper um eine auf der Ebene normale Axe gedreht wird, so ist $\Sigma(xX+yY)=0$ (§. 122.). Diese Gleichung wird aber nicht allein anfangs, sondern auch während der Drehung selbst zwischen den auf ein festes Axensystem bezogenen und daher mit der Drehung sich ändernden Coordinaten der Angriffspunkte bestehen, da jede neue Lage, in welche das System dieser Punkte gegen die Kräfte versetzt wird, Gleichgewicht mit sich führt und daher als eine anfängliche betrachtet werden kann.

Im Allgemeinen aber geht das anfängliche Gleichgewicht verloren, und das System wird gleichwirkend mit zwei Kräften P_1 und P_2, welche nebst ihren Angriffspunkten A_1 und A_2 so zu bestimmen sind (§. 124.), dass sie anfangs einander ebenfalls das Gleichgewicht halten, und dass anfangs

$$h=h_1, \text{ wo } h=\Sigma(xX+yY)$$

und $h_1=A_1A_2.P_2=x_1X_1+y_1Y_1+x_2X_2+y_2Y_2$ (vor. §.).

Die Gleichung $h = h_1$ besteht nun aus demselben Grunde, wie vorhin, auch während der Drehung, oder, allgemeiner ausgedrückt: wenn die Coordinaten sämmtlicher Angriffspunkte so geändert werden, dass die gegenseitigen Entfernungen dieser Punkte constant bleiben. Denn das neue System, welches man erhält, wenn man zu dem vorigen die Kräfte P_1 und P_2, nach entgegengesetzten Richtungen auf A_1 und A_2 wirkend, hinzufügt, dauert auch während der Drehung fort.

Da also unausgesetzt $h = h_1$ ist, und da h_1 beim sichern Gleichgewichte von P_1 mit P_2, also auch beim sichern zwischen (X, Y), (X', Y'), ... ein Maximum, beim unsichern dagegen ein Minimum ist, so muss dasselbe auch von h gelten.

Beim Gleichgewichte zwischen Kräften in einer Ebene ist demnach die Function

$$\Sigma(xX + yY)$$

ein Maximum oder Minimum, und zwar ersteres beim sichern, letzteres beim unsichern Gleichgewichte.

§. 175.

Auf ganz ähnliche Weise lässt sich auch bei Einem Systeme von Kräften im Raume eine Function ermitteln, die, wenn die Kräfte sich das Gleichgewicht halten, ein Maximum oder Minimum ist. Seyen P_1 und P_2 die beiden Kräfte, welche an den Punkten A_1 und A_2 angebracht, anfangs eben so, wie die Kräfte des Systems, mit einander im Gleichgewichte sind und bei der nachherigen Drehung um eine durch φ, χ, ψ bestimmte Axe mit dem Systeme gleichwirkend werden (§. 136. *c.*), Kräfte also, die in den entgegengesetzten Richtungen zu dem Systeme hinzugefügt, ein System hervorbringen, welches bei der Drehung um dieselbe

Axe sein Gleichgewicht nicht verliert. Alsdann muss seyn (§. 127. (8)):

$$\varphi\Sigma(yY+zZ)=\psi\Sigma xZ+\chi\Sigma xY,$$
$$\chi\Sigma(zZ+xX)=\varphi\Sigma yX+\psi\Sigma yZ,$$
$$\psi\Sigma(xX+yY)=\chi\Sigma zY+\varphi\Sigma zX,$$

Gleichungen, in denen sich das Summenzeichen ausser den Kräften des ursprünglichen Systems noch auf die Kräfte $-P_1$ und $-P_2$ erstreckt, und die, weil das Gleichgewicht zwischen $-P_1$, $-P_2$ und den Kräften des Systems fortdauert, nach demselben Schlusse, wie im vor. §., nicht allein bei den anfänglichen, sondern auch bei den durch die Drehung veränderten Werthen der Coordinaten ihre Gültigkeit haben.

Man multiplicire nun diese drei Gleichungen resp. mit φ, χ, ψ und addire sie, so kommt mit der Berücksichtigung, dass

$$\varphi^2 xX+\chi^2 yY+\psi^2 zZ$$
$$+\chi\psi(yZ+zY)+\psi\varphi(zX+xZ)+\varphi\chi(xY+yX)$$
$$=(\varphi x+\chi y+\psi z)(\varphi X+\chi Y+\psi Z)$$

und dass $\varphi^2+\chi^2+\psi^2=1$ ist:

$$\Sigma(xX+yY+zZ)=\Sigma[(\varphi x+\chi y+\psi z)(\varphi X+\chi Y+\psi Z)],$$

eine Gleichung, welche eben so, wie die drei vorigen, nicht bloss für den Anfang, sondern auch bei der nachherigen Drehung gilt.

Nun bleiben φ, χ, ψ und die Kräfte X, Y, Z; etc. während der Drehung unverändert. Eben so bleiben es auch die rechtwinkligen Projectionen der Angriffspunkte auf die Drehungsaxe, als die Mittelpunkte der von den Angriffspunkten um die Axe beschriebenen Kreise; mithin ändern sich auch nicht die Projectionen der vom Anfangspunkte der Coordinaten bis zu den Angriffspunkten gezogenen geraden Linien auf dieselbe

Axe, und diese Projectionen sind $= \varphi x + \chi y + \psi z$, etc. In Folge der zuletzt erhaltenen Gleichung bleibt daher auch die Summe $\Sigma(xX + \ldots)$ constant. Es ist aber diese Summe, wenn wir das Summenzeichen die Kräfte des ursprünglichen Systems allein umfassen lassen,

$$= \Sigma(xX + \ldots) - (x_1 X_1 + x_2 X_2 + \ldots + z_2 Z_2),$$

und sie erhält somit die Form einer Differenz. Die zwei diese constante Differenz bildenden Summen müssen daher gleichzeitig ihre grössten und kleinsten Werthe erreichen.

Nun hat die Summe $x_1 X_1 + \ldots + z_2 Z_2$ ihren grössten positiven Werth beim sichern Gleichgewichte, und ihren grössten, dem positiven absolut gleichen, negativen Werth beim unsichern Gleichgewichte zwischen P_1 und P_2 (§. 173.), folglich auch zwischen den Kräften des Systems.

Mithin ist auch die Summe

$$\Sigma(xX + yY + zZ)$$

beim sichern Gleichgewichte zwischen den Kräften des Systems ein Maximum und beim unsichern ein Minimum.

§. 176.

Auf noch kürzere Weise kann man zu diesem Resultate gelangen, wenn man die in §. 174. erhaltene Formel für das Maximum oder Minimum beim Gleichgewichte eines in einer Ebene enthaltenen Systems zu Hülfe nimmt. Sind nämlich die auf die Punkte (x, y, z), etc. wirkenden Kräfte (X, Y, Z), etc. im Gleichgewichte, so sind es auch die Projectionen derselben auf die Ebene der x, y, d. i. die auf die Punkte $(x, y, 0)$, etc. wirkenden Kräfte $(X, Y, 0)$, etc. (§. 68.), und es ist, wenn man den Körper um eine auf dieser Ebene normale, d. i. mit der Axe der z parallele, Axe dreht,

die Function $\Sigma(xX+yY)$ ein Maximum beim sichern und ein Minimum beim unsichern Gleichgewichte der Kräfte $(X, Y, 0)$ etc., folglich auch der Kräfte (X, Y, Z) etc. (§. 164.). Da ferner bei dieser Drehung die Coordinaten z, etc., mithin auch die Summe ΣzZ, ungeändert bleiben, so ist unter denselben Bedingungen auch $\Sigma(xX+yY+zZ)$ ein Maximum oder Minimum. Es ist aber diese Summe, wenn wir die Kräfte mit P, etc. ihre Angriffspunkte mit A, etc. und den Anfangspunkt der Coordinaten mit O bezeichnen, $= \Sigma OA.P \cos(OA^{\wedge}P)$, und daher unabhängig von dem durch O gelegten Systeme der Coordinatenaxen, also ein Maximum oder Minimum, auch wenn der Körper um eine andere, mit der Axe der z nicht parallele Axe gedreht wird.

Zusatz. Trifft ein von O auf die Richtung von P gefälltes Perpendikel dieselbe in M (Fig. 47.), so ist $MA = OA \cos(OA^{\wedge}P)$, und die vorige Summe wird $= \Sigma MA.P$. Wird hierauf der Körper verrückt, und geht damit A nach $A_{,}$ fort, und ist $M_{,}$ der Fusspunkt des von O auf die nunmehrige Richtung von P gefällten Perpendikels, so verwandelt sich die Summe in $\Sigma M_{,}A_{,}.P$. Weil aber die Richtungen von P in der ersten und zweiten Lage des Körpers einander parallel sind, so ist $OMM_{,}$ eine auf der Richtung von P normale Ebene. Die Summe, welche beim Gleichgewichte ein Grösstes oder Kleinstes ist, wird daher auch erhalten, wenn man durch einen unbeweglichen Punkt O Ebenen legt, welche die Richtungen der Kräfte rechtwinklig schneiden, hierauf jede Kraft in den Theil ihrer Richtung vom Durchschnitte der letztern mit der auf ihr normalen Ebene bis zum Angriffspunkte der Kraft multiplicirt und diese Producte addirt.

Fig 47.

P
A,
P
A
N
M,
M
O

Weil die Richtungen der Kräfte sich parallel bleiben, so sind die durch O gelegten Ebenen eben so, wie O selbst, unbeweglich. Man sieht aber leicht, dass man statt der in O sich gemeinschaftlich schneidenden Ebenen irgend andere unbewegliche, auf den Richtungen der Kräfte normale Ebenen setzen kann. Denn wird die Richtung von P von einer auf ihr normalen und nicht durch O gehenden Ebene in N geschnitten, so ist der Unterschied $MA.P - NA.P = MN.P$, also constant, weil es sowohl P, als der gegenseitige Abstand MN der beiden unbeweglichen Ebenen ist. Mithin ist auch der Unterschied der Summen $\Sigma MA.P$ und $\Sigma NA.P$ constant, und daher die eine mit der andern gleichzeitig ein Grösstes oder Kleinstes; also:

Halten sich mehrere auf einen frei beweglichen Körper wirkende Kräfte das Gleichgewicht, und denkt man sich die Richtung jeder Kraft von einer unbeweglichen Ebene normal geschnitten und multiplicirt jede Kraft in den Theil ihrer Richtung vom Durchschnitte der auf ihr normalen Ebene bis zu ihrem Angriffspunkte, so ist, wenn der Körper um eine beliebige Axe, sey es nach der einen, oder nach der andern Seite, gedreht wird, die damit sich ändernde Summe jener Producte beim anfänglichen Gleichgewichte selbst ein Maximum oder ein Minimum, und zwar ersteres, wenn das Gleichgewicht in Bezug auf diese Drehung sicher, letzteres, wenn es unsicher ist.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 177.

Jede Verrückung eines Körpers kann in eine Axendrehung und in eine parallele Fortbewegung zerlegt werden. Sind nun die auf einen Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewichte, und wird der Körper um eine Axe gedreht, so ist, wie eben gezeigt worden, die Summe $\Sigma(xX+yY+zZ)$ für die Lage im Gleichgewichte selbst ein Maximum oder Minimum. Wird aber der Körper parallel mit sich fortbewegt, und nimmt alsdann der Punkt, welcher anfangs mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfiel, den Ort (a, b, c) ein, so wird die gedachte Summe $=\Sigma((x+a)X + (y+b)Y+(z+c)Z) = \Sigma(xX+yY+zZ)$, wegen $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z=0$ (§. 66.), und bleibt daher ungeändert. Deshalb und zufolge der bekannten Natur der Grössten und Kleinsten wird daher die Summe überhaupt sich nicht ändern, wenn der Körper aus der Lage des Gleichgewichts um ein unendlich Weniges auf irgend eine Weise verrückt wird, d. h. es wird

$$\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz)=0$$

seyn, wofern nur die Differentiale dx, dy, dz, dx', etc. so genommen werden, dass die gegenseitigen Entfernungen der Punkte (x, y, z), (x', y', z'), etc. unverändert bleiben.

Es ist aber $Xdx+Ydy+Zdz=$ dem Product aus der Kraft (X, Y, Z) in den auf ihre Richtung projicirten Weg, den ihr Angriffspunkt (x, y, z) bei der unendlich kleinen Verrückung des Körpers genommen hat; und wir können daher auch sagen:

Ist ein System von Kräften, welche auf einen frei beweglichen Körper wirken, im Gleichgewichte,

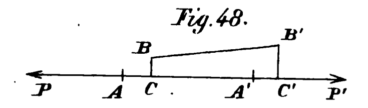
und wird der Körper um ein unendlich Weniges verrückt, so ist die Summe der Producte aus jeder Kraft in den nach ihrer Richtung geschätzten Weg ihres Angriffspunktes jederzeit null.

Die bei einem sich bewegenden Körper in einem unendlich kleinen Zeittheile durchlaufenen Wege seiner Punkte sind den alsdann stattfindenden Geschwindigkeiten der Punkte proportional. Diese Wege, geschätzt nach den Richtungen der Kräfte, welche an den die Wege beschreibenden Punkten angebracht sind, nennt man daher die virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte; und der Satz, welcher aussagt, dass die Summe der in die virtuellen Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte multiplicirten Kräfte beim Gleichgewichte null ist, heisst hiernach das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 178.

Die Reihe der Schlüsse, durch welche wir uns nach und nach zu diesem Princip erhoben haben, ist ziemlich zusammengesetzt. Da nun gleichwohl die Einfachheit des Princips einen derselben angemessenen Beweis wünschenswerth macht, und es auch an sich interessant ist, zu sehen, wie das Princip in den einfachsten Fällen sich bestätigt, so will ich noch folgenden möglichst kurzen und auf den ersten Gründen der Statik beruhenden Beweis desselben hinzufügen.

1) Seyen P und P' (Fig. 48.) zwei sich das Gleichgewicht haltende Kräfte, A und A' ihre Angriffspunkte, welche durch eine unendlich kleine Verrückung nach B und B' kommen, so dass B dem A und B' dem A' unendlich nahe liegt, und $BB' = AA'$ ist. Die Projectionen von B und B' auf AA' seyen C und C',



so ist wegen des unendlich kleinen Winkels von BB' mit AA', $CC'=BB'=AA'$, folglich $AC=A'C'$. Wegen des Gleichgewichts sind aber die Kräfte P und P' einander gleich, und ihre Richtungen in der Linie AA' einander direct entgegengesetzt, also AC und $A'C'$ die virtuellen Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte. Nimmt man daher jede Kraft positiv, und die virtuellen Geschwindigkeiten positiv oder negativ, nachdem sie mit den ihnen zugehörigen Kräften einerlei oder entgegengesetzte Richtungen haben, so ist

$$P.AC+P'.A'C'=0,$$

und somit das Princip für den einfachsten Fall bewiesen.

2) Seyen $P, P', P'', \ldots$ (Fig. 49.) mehrere auf denselben Punkt A eines Körpers wirkende und sich das Gleichgewicht haltende Kräfte. Durch eine Verrückung des Körpers komme A nach B, und die Projectionen von B auf die anfänglichen Richtungen der Kräfte seyen $C, C', C'', \ldots$, also $AC, AC', AC'', \ldots$ die virtuellen Geschwindigkeiten von A. Wegen des Gleichgewichts ist nun die Summe der Projectionen der Kräfte auf die durch A und B zu legende Gerade $=0$, wie ganz einfach aus dem Parallelepipedum der Kräfte fliesst (§. 67. 2.). Es ist daher $P\cos\varphi+P'\cos\varphi'+\ldots=0$, wenn $\varphi, \varphi', \ldots$ die von $P, P', \ldots$ mit AB gebildeten Winkel bezeichnen. Zugleich ist aber $\cos\varphi=\frac{AC}{AB}$, $\cos\varphi'=\frac{AC'}{AB}$, etc.; folglich auch hier:

$$P.AC+P'.AC'+P''.AC''+\ldots=0.$$

3) Treffen sich die Richtungen der sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte $P, P', \ldots$ in einem Punkte A, wirken sie aber nicht unmittelbar auf diesen Punkt, sondern auf beliebige andere Punkte ihrer Richtungen, so bringe man in A die resp. den Kräften $P, P', \ldots$

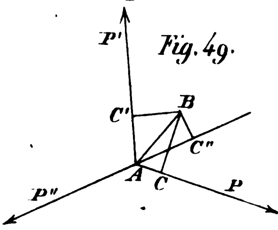


Fig. 49.

gleichen und direct entgegengesetzten Kräfte $Q, Q', \ldots$ an, so dass Q mit P, Q' mit P', etc. und $Q, Q', \ldots$ untereinander, eben so wie $P, P' \ldots$ untereinander, im Gleichgewichte sind. Verrücken wir nun den Körper um ein unendlich Weniges und bezeichnen dabei die virtuelle Geschwindigkeit des Angriffspunktes einer Kraft mit dem Buchstaben aus dem kleinen Alphabete, welcher dem grossen Buchstaben entspricht, womit die Kraft ausgedrückt ist, so haben wir
nach 1): $Pp + Qq = 0$, $P'p' + Q'q' = 0$, etc.
und nach 2): $Qq + Q'q' + \ldots = 0$,
folglich wiederum: $Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0$.

4) Aus letzterer Gleichung folgt: $P'p' + P''p'' + \ldots = -Pp$, d. h.: Bei mehreren nach einem Punkte gerichteten und sich nicht das Gleichgewicht haltenden Kräften ist die Summe der in die virtuellen Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte multiplicirten Kräfte gleich dem Producte aus der Resultante in die virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes.

5) Bei drei Kräften, welche im Gleichgewichte und einander nicht parallel sind, muss nach 3) das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten immer Gültigkeit haben, weil dann die Richtungen der Kräfte sich immer in einem Punkte begegnen.

6) Sind drei sich das Gleichgewicht haltende Kräfte P, Q, R einander parallel, so zerlege man die eine derselben, P, in der Ebene, worin sie alle drei enthalten seyn müssen, in zwei andere S und T, welche nicht mit einander, folglich auch nicht mit P, Q, R, parallel sind. Von Q und S sey die Resultante U, und von R und T sey die Resulsante V, so halten sich U und V das Gleichgewicht, und es ist nach 4) und 5) mit Anwendung der in 3) gewählten Bezeichnungsart:

$$\therefore Pp = Ss + Tt,\ Qq + Ss = Uu,\ Rr + Tt = Vv$$

und nach 1) $Uu + Vv = 0$,

mithin, wenn man diese vier Gleichungen addirt:

$$Pp + Qq + Rr = 0;$$

das Princip ist folglich auch in diesem Falle gültig.

7) Betrachten wir jetzt ganz allgemein ein System von Kräften $P, P', P'', \ldots$, die, auf beliebige Punkte $A, A', A'', \ldots$ eines frei beweglichen Körpers wirkend, im Gleichgewichte sind. Seyen F, G, H irgend drei andere Punkte des Körpers, welche nicht in einer Geraden liegen. Vermittelst des Parallelepipedums der Kräfte zerlege man die Kraft P nach den Richtungen AF, AG, AH in drei andere Q, R, S; eben so die Kraft P' nach den Richtungen $A'F, A'G, A'H$ in die Kräfte Q', R', S'; die Kraft P'' nach $A''F, A''G, A''H$ in die Kräfte Q'', R'', S''; u. s. w. Man setze hierauf die nach F gerichteten Kräfte $Q, Q', Q'', \ldots$ zu einer einzigen Q_1 zusammen; auf gleiche Art bestimme man von den nach G gerichteten Kräften $R, R', \ldots$ die Resultante R_1, und von den nach H gerichteten $S, S', \ldots$ die Resultante S_1. Hiermit ist das ganze System auf die drei Kräfte Q_1, R_1, S_1 reducirt, welche sich daher ebenfalls das Gleichgewicht halten müssen. Wird nun der Körper um ein unendlich Weniges verrückt, so haben wir nach 4) die Gleichungen:

$$\therefore Pp = Qq + Rr + Ss,\ P'p' = Q'q' + R'r' + S's',\ \text{etc.}$$

$$Qq + Q'q' + \ldots = Q_1q_1,$$

$$Rr + R'r' + \ldots = R_1r_1,$$

$$Ss + S's' + \ldots = S_1s_1,$$

und nach 5), oder 6), nachdem die Kräfte Q_1, R_1, S_1 sich in einem Punkte treffen, oder einander parallel sind:

$$Q_1q_1 + R_1r_1 + S_1s_1 = 0.$$

Die Addition aller dieser Gleichungen aber giebt:

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0$$

wie zu erweisen war.

§. 172.

Der im vorigen §. bewiesene Satz lässt sich auch umkehren, so dass, wenn *jedesmal, wie auch der Körper um ein unendlich Weniges verrückt werden mag, die Summe der virtuellen Geschwindigkeiten $Pp + P'p' + \ldots$ null ist, die Kräfte P, P'.... auch das Gleichgewicht halten.*

Denn wären sie nicht im Gleichgewichte, so müssten sie durch Hinzufügung einer Kraft R, oder im allgemeinen Falle durch Hinzufügung zweier nicht zu einer Kraft vereinbaren Kräfte S und T, ins Gleichgewicht gebracht werden können. Vermöge des vor. §. müsste daher seyn:

$$Rr + Pp + P'p' + \ldots = 0,$$

$$\text{oder } Ss + Tt + Pp + P'p' + \ldots = 0,$$

$$\text{also entweder } Rr = 0, \text{ oder } Ss + Tt = 0$$

weil jetzt $Pp + P'p' + \ldots = 0$ seyn soll.

Es ist aber nicht bei jeder Verrückung des Körpers $r = 0$ und daher $Rr = 0$, sondern nur dann, wenn der Angriffspunkt von R entweder in Ruhe bleibt, oder sein Weg auf der Richtung von R rechtwinklig ist.

Eben so wenig kann bei den zwei einander nicht das Gleichgewicht haltenden und nicht auf eine Kraft reducirbaren Kräften S und T jedesmal $Ss + Tt = 0$ seyn. Denn heissen S_1 und T_1 die Angriffspunkte von S und T, und wird der Körper um eine durch S_1 gehende Axe gedreht, so ist $s = 0$. Alsdann ist der Weg von T_1 nur in dem Falle null, wenn die Axe zugleich durch T_1 geht, und nur in dem Falle auf T perpen-

dikular, wenn sie zugleich mit T in einer Ebene liegt. Bei der Drehung um jede andere durch S_0 gehende Axe macht der Weg von T_0 mit T einen schiefen Winkel, und es ist daher nicht $t = 0$, also auch nicht $Ss + Tt = 0$. — Wird durch S_0 und T keine Ebene bestimmt, liegt also S_0 in T, so lassen sich S und T auf eine einzige Kraft reduciren, was gegen die Voraussetzung streitet.

Da also weder Rr noch $Ss + Tt$ stets $= 0$ seyn können, wie doch, wenn zwischen $P, P', \ldots$ kein Gleichgewicht bestände, erforderlich wäre, so müssen $P, P', \ldots$ im Gleichgewichte seyn.

§. 180.

Auch bei jedem Systeme mehrerer auf irgend eine Art mit einander verbundener Körper, auf welche Kräfte wirken, lässt sich, wie wir späterhin sehen werden, darthun, dass, wenn die Kräfte sich das Gleichgewicht halten, bei jeder möglichen Verrückung des Systems die Summe der Kräfte, multiplicirt in die virtuellen Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte, null ist, und dass umgekehrt, wenn diese Summe bei jeder Verrückung, welche die Verbindung der Körper zulässt, sich null findet, Gleichgewicht herrscht. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in seiner umgekehrten Form schliesst daher die Bedingungen des Gleichgewichts für jeden möglichen Fall in sich, und es müssen sich durch dasselbe ohne weitere Zuhülfenahme von Sätzen der Statik alle Aufgaben dieser Wissenschaft in Rechnung setzen und lösen lassen.

Johann Bernoulli scheint der erste gewesen zu seyn, welcher das in Rede stehende Princip in seiner grossen Allgemeinheit aufgefasst und seinen Nutzen für

die Statik erkannt hat. Wie aber dasselbe zur Lösung statischer Aufgaben wirklich angewendet werden kann, und wie sich aus ihm analytische Formeln herleiten lassen, welche die Lösungen aller das Gleichgewicht betreffenden Probleme in sich fassen, dies hat zuerst Lagrange gezeigt.*) Sein Verfahren besteht dem Wesentlichen nach in Folgendem:

Bei jeder Aufgabe der Statik sind gewisse Bedingungen gegeben, denen die Angriffspunkte der Kräfte bei jeder möglichen Verrückung der Körper, auf welche die Kräfte wirken, unterworfen sind. Diese Bedingungen lassen sich immer durch eine gewisse Anzahl von Gleichungen zwischen den Coordinaten der Angriffspunkte ausdrücken. Man differentiire diese Gleichungen, wenn sie anders nicht schon ihrer Natur nach Differentialgleichungen sind, und eliminire damit aus der das Princip ausdrückenden Gleichung $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = 0$ so viele Differentiale, als möglich, und verwandele auf diese Weise die Gleichung in eine andere, welche bloss von einander unabhängige Differentiale enthält. Setzt man alsdann, wie gehörig, den Coefficienten jedes dieser Differentiale für sich $= 0$, so hat man eben dadurch die zum Gleichgewichte nöthigen Bedingungen gefunden.

§. 181.

Zur Erläuterung dieser Methode wollen wir damit die schon aus §. 66. bekannten Bedingungen des Gleichgewichts für einen einzigen frei beweglichen Körper herzuleiten suchen.

Ausser dem rechtwinkligen Coordinatensysteme,

*) Lagrange Mécanique analytique, Section I.

dessen Axen eine unveränderliche Lage im Raume haben, und rücksichtlich dessen die Kräfte und ihre Angriffspunkte durch (X, Y, Z) etc. und (x, y, z) etc. bezeichnet werden, beziehe man jeden Angriffspunkt noch auf ein zweites Coordinatensystem, dessen sich gleichfalls unter rechten Winkeln schneidende Axen mit dem Körper fest verbunden sind. Rücksichtlich dieses zweiten Systems seyen die Angriffspunkte: (x_1, y_1, z_1) etc. Sey ferner (a, b, c) der Anfangspunkt des zweiten Systems in Bezug auf das erste und $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots,$ wie in §. 127., die Cosinus der Winkel, welche die Axen des einen Systems mit denen des andern machen, so ist:

$$x = a + x_1\alpha + y_1\alpha' + z_1\alpha'',$$
$$y = b + x_1\beta + y_1\beta' + z_1\beta'',$$
$$z = c + x_1\gamma + y_1\gamma' + z_1\gamma'',$$

u. s. w. Hierin sind, der Natur des festen Körpers gemäss, $x_1, y_1, z_1,$ etc. constant; dagegen sind $a, b, c, \alpha, \beta, \ldots \gamma''$ und damit x, y, z bei der Bewegung des Körpers veränderlich. Differentiirt man daher diese Gleichungen, so kommt:

$$(a) \begin{cases} dx = da + x_1 d\alpha + y_1 d\alpha' + z_1 d\alpha'', \\ dy = db + x_1 d\beta + y_1 d\beta' + z_1 d\beta'', \\ dz = dc + x_1 d\gamma + y_1 d\gamma' + z_1 d\gamma''; \end{cases}$$

und somit lassen sich die virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte, wie viel ihrer auch seyn mögen, durch die 12 Differentiale $da, db, dc, d\alpha, \ldots d\gamma''$ ausdrücken.

Es sind aber vermöge der Gleichungen (A), oder (B), und (C) in §. 127. von den 9 Cosinussen $\alpha, \ldots \gamma''$, und mithin auch von ihren Differentialen, nur 3 von einander unabhängig. Um dieses zu berücksichtigen

und um zugleich die deshalb nöthige Rechnung möglichst zu vereinfachen, wollen wir die Axen der x_1, y_1, z_1 mit denen der x, y, z anfänglich zusammenfallen lassen und daher die anfänglichen Werthe von $a, b, c, \alpha', \alpha''$, $\beta'', \beta, \gamma, \gamma' = 0$ und von $\alpha, \beta', \gamma'' = 1$ setzen. Differentiiren wir nun die Gleichungen (A) und (C) und setzen alsdann für $\alpha, \ldots \gamma''$ die bemerkten Werthe, so findet sich:

$$d\beta'' + d\gamma' = 0, \quad d\gamma + d\alpha'' = 0, \quad d\alpha' + d\beta = 0,$$
$$d\alpha = 0, \qquad d\beta' = 0, \qquad d\gamma'' = 0,$$

und es kommt, wenn wir damit $d\beta'', d\gamma, d\alpha', d\alpha, d\beta', d\gamma''$ aus (a) eliminiren und mehrerer Symmetrie willen dp, dq, dr für $d\gamma', d\alpha'', d\beta$ schreiben:

$$(b) \begin{cases} dx = da - ydr + zdq, \\ dy = db - zdp + xdr, \\ dz = dc - xdq + ydp, \end{cases}$$

wo noch x, y, z für x_1, y_1, z_1 gesetzt sind, da unter der gemachten Annahme anfänglich $x_1 = x$, etc. ist.

Mit diesen Werthen für dx, dy, dz wird nun:

$$(c) \; Xdx + Ydy + Zdz = Xda + Ydb + Zdc$$
$$+ (yZ - zY)dp + (zX - xZ)dq + (xY - yX)dr.$$

Bilden wir eine ähnliche Gleichung für jede andere Kraft des Systems und summiren dann alle diese Gleichungen, so kommt, weil nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten beim Gleichgewichte $\Sigma(Xdx + \ldots) = 0$ ist, und weil da, db, dc, dp, dq, dr nicht von einander und bloss von der willkührlichen Bewegung des Körpers abhängen, mithin für alle Kräfte einerlei Werthe haben:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$
$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0,$$

welches die gesuchten Bedingungen für das Gleichgewicht sind.

§. 182.

Zu der beim Gleichgewichte statt findenden Gleichung zwischen den virtuellen Geschwindigkeiten $\Sigma(Xdx+\ldots)=0$ gelangten wir in §. 177. durch die Betrachtung, dass die Function $\Sigma(Xx+\ldots)$ beim Gleichgewichte ein Maximum oder Minimum seyn müsse. Da wir uns hierauf (§§. 178. 179.) von der Richtigkeit dieser Gleichung noch auf andere Weise überzeugt haben, so können wir aus ihr nach der Theorie der Grössten und Kleinsten jetzt umgekehrt schliessen, dass die Function $\Sigma(Xx+\ldots)$ beim Gleichgewichte ihren grössten oder kleinsten Werth erreicht, und zwar erstern, wenn das zweite Differential $\Sigma(Xd^2x+\ldots)$ negativ, letzteren, wenn es positiv ist. Es giebt aber die Differentiation der Gleichung (c):

$$Xd^2x+\ldots=Xd^2a+\ldots+(yZ-zY)\,d^2p+\ldots$$
$$+(Zdy-Ydz)\,dp+\ldots$$

Setzen wir hierin für dx, dy, dz ihre Werthe aus (b), summiren dann, erwägen, dass beim Gleichgewichte ΣX, etc. und $\Sigma(yZ-zY)$ etc. null sind, und gebrauchen endlich die in §. 127. für $\Sigma yZ=\Sigma zY$, etc. und für $\Sigma(yY+zZ)$, etc. eingeführten Bezeichnungen F, G, H und f, g, h, so ergiebt sich:

$$(d)\quad \Sigma(Xd^2x+\ldots)=-fdp^2-gdq^2-hdr^2$$
$$+2Fdq\,dr+2G\,dr\,dp+2H\,dp\,dq.$$

Nun ist nach den Gleichungen (b) für alle Punkte der durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Geraden, welcher die Gleichungen

$$\frac{dp}{x}=\frac{dq}{y}=\frac{dr}{z}$$

zukommen, und welche wir l nennen wollen, $dx=da$, $dy=db$, $dz=dc$. Alle Punkte dieser Geraden l be-

wegen sich daher bei der Verrückung des Körpers um gleiche Theile nach parallelen Richtungen fort, so dass, wenn man den ganzen Körper an dieser parallelen Bewegung der l theilnehmen lässt, er dann nur noch um einen gewissen Winkel um l gedreht werden muss, um aus seiner anfänglichen in die neue durch da, db, dc, dp, dq, dr bestimmte Lage zu gelangen. Vergl. §. 130.

Setzen wir nun

$$dp = \varphi ds,\quad dq = \chi ds,\quad dr = \psi ds,$$

und $ds^2 = dp^2 + dq^2 + dr^2$, also $\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2 = 1$, so sind, den Gleichungen für l zufolge, φ, χ, ψ die Cosinus der Winkel der Drehungsaxe l mit den Axen der x, y, z, haben also dieselbe Bedeutung, wie oben (§. 128.), und es ist vermöge der Gleichung (d), nachdem wir darin für dp, dq, dr ihre jetzigen Werthe substituirt haben, die Summe $\Sigma(Xx + \ldots)$ ein Maximum oder ein Minimum, jenachdem die Function

$$f\varphi^2 + g\chi^2 + h\psi^2 - 2F\chi\psi - 2G\psi\varphi - 2H\varphi\chi$$

positiv oder negativ ist; — übereinstimmend mit den bereits im Vorigen erhaltenen Resultaten, dass, je nachdem diese Function einen positiven oder negativen Werth hat, das Gleichgewicht sicher oder unsicher ist, und dass beim sichern Gleichgewichte die Summe $\Sigma(Xx + \ldots)$ ein Grösstes, beim unsichern ein Kleinstes ist.

§. 183.

Zusätze. *a.* Wird der Körper nur gedreht, und dieses um die durch den Anfangspunkt O der Coordinaten gehende Axe l, nicht aber zugleich parallel mit sich fortgerückt, so sind da, db, $dc = 0$, und die Gleichungen (b) werden

(b^*) $dx = z\,dq - y\,dr,\ dy = x\,dr - z\,dp,\ dz = y\,dp - x\,dq.$

Addirt man die Quadrate derselben, nachdem man in ihnen $\varphi\,ds, \ldots$ für $dp, \ldots$ gesetzt hat, so ergiebt sich:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\,ds^2 - (x\varphi + y\chi + z\psi)^2\,ds^2$$
$$= r^2\,ds^2 - (r\,ds \cos r^\wedge l)^2$$
$$= (r\,ds \sin r^\wedge l)^2,$$

wenn man noch die von O bis zum Punkte (x, y, z) geführte Gerade r nennt. Es ist aber $r \sin r^\wedge l$ das von (x, y, z) auf die durch O gehende Axe l gefällte Perpendikel, und $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ der von (x, y, z) bei der Drehung beschriebene Weg. Da nun dieser Weg der Natur der Sache nach auf jenem Perpendikel und der Drehungsaxe normal ist, so ist $ds = \sqrt{(dx^2 + \ldots)} : r \sin r^\wedge l =$ dem unendlich kleinen Winkel selbst, um welchen der Körper gedreht worden.

b. Fällt die Axe der Drehung mit der Axe der x zusammen, so werden $\varphi = 1$, $\chi = 0$, $\psi = 0$; folglich $dp = ds =$ dem Drehungswinkel, und $dq, dr = 0$. Wenn daher der Körper um die Axe der x um einen Winkel $= dp$ gedreht wird, so sind nach (b^*) die nach den Coordinatenaxen geschätzten Verrückungen des Punktes (x, y, z):

$$dx = 0,\ dy = -z\,dp,\ dz = y\,dp.$$

Auf gleiche Weise finden sich diese Verrückungen bei einer Drehung um die Axe der y um einen Winkel $= dq$:

$$dx = z\,dq,\ dy = 0,\ dz = -x\,dq,$$

und eben so bei einer Drehung um die Axe der z um einen Winkel $= dr$:

$$dx = -y\,dr,\ dy = x\,dr,\ dz = 0.$$

Wird folglich der Körper nach und nach um die

Axen der x, y, z resp. um die Winkel dp, dq, dr gedreht, so sind nach den Principien der Differentialrechnung die dadurch bewirkten Verrückungen des Punktes (x, y, z) die Summen der eben gefundenen, d. i.

$$dx = z\,dq - y\,dr, \quad dy = x\,dr - z\,dp, \quad \text{etc.},$$

also dieselben, wie in (b^*), d. h. die drei Drehungen dp, dq, dr um die Axen der x, y, z sind gleichwirkend mit einer einzigen Drehung $ds = \sqrt{(dp^2 + dq^2 + dr^2)}$ um eine durch O gehende Axe l, welche mit jenen Axen Winkel macht, deren Cosinus sich wie dp, dq, dr verhalten.

Unendlich kleine Drehungen um drei sich unter rechten Winkeln in einem Punkte schneidende Axen lassen sich daher ganz auf dieselbe Weise, wie Kräfte, zu einer einzigen Drehung zusammensetzen, indem man nämlich den Axen und Winkeln der Drehungen die Richtungen und Intensitäten der Kräfte entsprechen lässt.

c. Diese merkwürdige Analogie zwischen Drehungen und Kräften dehnt sich aber noch viel weiter aus. Denn so wie Kräfte, deren Richtungen in eine und dieselbe Gerade fallen, gleiche Wirkung mit einer einzigen nach derselben Geraden gerichteten Kraft haben, welche der algebraischen Summe der Kräfte gleich ist, oder sich das Gleichgewicht halten, wenn ihre Summe null ist, so sind auch Drehungen um eine und dieselbe Axe gleichwirkend mit einer ihrer Summe gleichen Drehung um die nämliche Axe, oder sie lassen den Körper unverrückt, wenn ihre Summe null ist. Da nun mit Hülfe des rechtwinkligen Parallelepipedums der Kräfte und des Satzes von Kräften, deren Richtungen in dieselbe Gerade fallen, sich alle Zusammensetzungen und Zerlegungen von Kräften, die auf einen und denselben Punkt gerichtet sind, ausführen lassen,

und da durch passende Verbindung dieser Operationen jedes System von Kräften überhaupt, wenn es nicht im Gleichgewichte ist, auf die geringste Anzahl von Kräften reducirt werden kann, so müssen sich auf dieselbe Weise, wie Kräfte, auch Drehungen um beliebig gerichtete Axen auf eine oder höchstens zwei Drehungen reduciren lassen und unter denselben Bedingungen keine Verrückung hervorbringen, unter welchen Kräfte mit einander im Gleichgewichte sind, d. h.

Unendlich kleine Drehungen heben sich stets gegen einander auf, wenn ihnen proportionale und nach ihren Axen gerichtete Kräfte sich das Gleichgewicht halten, und umgekehrt.

d. Die gegenseitige Beziehung zwischen Kräften und rein geometrischen Drehungen offenbart sich noch auf eine sehr bemerkenswerthe Art bei Paaren von Kräften und Drehungen. Ein Kräftepaar strebt den Körper, auf den es wirkt, um eine auf der Ebene der Kräfte normale Axe zu drehen, und die Grösse dieses Strebens wird durch das Moment des Paares, d. h. durch das Product aus der einen Kraft in ihre Entfernung von der andern, gemessen, da Paare in einer Ebene von gleichen Momenten auch gleiche Wirkungen haben. Dagegen wird der Körper durch zwei einander gleiche und entgegengesetzte Drehungen um zwei parallele Axen parallel mit einer Normallinie auf der Ebene der Axen fortgerückt, und dieses um eine Grösse, die dem Product aus dem Drehungswinkel in den gegenseitigen Abstand der beiden Axen gleich ist. Es leuchtet hieraus von selbst ein, dass das Axenpaar der Drehungen eben so, wie das Kräftepaar, ohne Aenderung seiner Wirkung beliebig in seiner Ebene und in jeder damit parallelen Ebene verlegt werden kann, und dass

eben so wenig, wie ein Kräftepaar sich auf eine einzige Kraft reduciren lässt, auch ein Paar von Drehungen mit einer einzigen Drehung gleiche Wirkung hat.

e. Das Moment einer Kraft in Bezug auf eine Axe des Körpers kann als die Grösse des Strebens betrachtet werden, mit welchem die Kraft den Körper um die Axe, falls diese unbeweglich gemacht wird, zu drehen sucht. Denn, wie schon aus dem Früheren leicht erhellet und späterhin besonders bewiesen werden wird, sind an einem Körper, der eine unbewegliche Axe hat, zwei Kräfte gleichwirkend, wenn sie in Bezug auf die Axe einander gleiche Momente haben. Zufolge der eben bemerkten Reciprocität zwischen drehender und fortrückender Bewegung wird daher umgekehrt durch eine unendlich kleine Drehung des Körpers um eine Axe ein gleichförmiges Fortrücken desselben in Bezug auf eine andere Gerade erzeugt werden, und die Grösse dieses Fortrückens wird auf ganz ähnliche Art, wie das Moment einer Kraft, von der Lage der Geraden gegen die Drehungsaxe und von der Grösse der Drehung abhängig seyn.

In der That folgt dies auch unmittelbar aus jeder der Gleichungen (b^*). Denn so ist z. B. dz, oder die nach der Axe der z geschätzte Verrückung des Punktes (x, y, z), $= y\,dp - x\,dq$, also unabhängig von z, d. h. jeder Punkt der die Ebene der x, y im Punkte (x, y) normal treffenden Geraden rückt längs derselben um gleichviel fort, wenn der Körper um die Axe l um ds gedreht wird. Die Fortrückung selbst aber ist, wenn für dp und dq ihre Werthe aus vor. §. substituirt werden, $= (y\varphi - x\chi)\,ds$, und auf gleiche Weise findet sich (§. 65.) in Bezug auf dieselbe Gerade das Moment einer Kraft P, welche die Axe l zur Richtung hat, also

durch den Anfangspunkt O geht und mit den Axen der x, y, z Winkel macht, deren Cosinus $= \varphi, \chi, \psi$ sind, $= (y\varphi - x\chi) P$. Die längs einer Geraden geschätzte Fortrückung ihrer Punkte, wenn der Körper um einen unendlich kleinen Winkel gedreht wird, ist daher nichts anderes, als das auf diese Gerade bezogene Moment der Drehung, also das Product aus der Drehung in den kürzesten Abstand ihrer Axe von der Geraden und in den Sinus des Winkels, den beide Linien mit einander machen (§. 50. Zus.).

Eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes gestattet der Raum nicht, und ich bemerke nur noch, dass zu Folge des jetzt Erörterten Alles, was bis zum Ende des sechsten Kapitels von Kräften und den Momenten derselben gelehrt worden ist, auch vollkommene Anwendung auf unendlich kleine Drehungen und deren Momente erleidet.

Das Princip der kleinsten Quadrate.

§. 184.

Ausser der Function $\Sigma(Xx + \ldots)$, die beim Gleichgewichte ein Maximum oder ein Minimum wird, giebt es noch eine andere Function, welche dieselbe Eigenschaft besitzt, und die sich ebenfalls aus der Gleichung zwischen den virtuellen Geschwindigkeiten durch Integration herleiten lässt. Zu dem Ende wollen wir uns jede Kraft, wie im Früheren, ihrer Richtung und Grösse nach durch eine von ihrem Angriffspunkte ausgehende gerade Linie ausgedrückt vorstellen. Für die Kraft (X, Y, Z) ist daher (x, y, z) der Anfangspunkt dieser Linie; der Endpunkt sey (ξ, η, ζ), also $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ proportional mit X, Y, Z. Nach dem Princip der

virtuellen Geschwindigkeiten muss daher beim Gleichgewichte seyn:

$$\Sigma[(\xi-x)dx+(\eta-y)dy+(\zeta-z)dz]=0.$$

Von der linken Seite dieser Gleichung ist aber, sobald wir die Coordinaten ξ, η, ζ der Endpunkte der Kräfte constant nehmen und die Gleichung noch mit -2 multipliciren, das Integral:

$$\Sigma[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]=M.$$

Dieser Ausdruck muss daher beim Gleichgewichte gleichfalls ein Maximum oder Minimum seyn.

Sind demnach auf einen frei beweglichen Körper wirkende Kräfte im Gleichgewichte, und werden sie ihrer Richtung und Intensität nach durch gerade von ihren Angriffspunkten A, A', ... aus gezogene Linien AF, $A'F'$, ... dargestellt, so ist, wenn man bei Verrückung des Körpers die Punkte F, F', ... unbeweglich annimmt, die Summe der Quadrate $AF^2+A'F'^2+\ldots$ bei der Lage des Körpers im Gleichgewichte ein Maximum oder Minimum.

Da das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten nach §. 179. umgekehrt werden kann, so muss dieses auch mit dem voranstehenden Satze geschehen können, und wir erhalten damit folgenden:

Hat man ein bewegliches System in unveränderlichen Entfernungen von einander liegender Punkte A, A', ... und ein unbewegliches System von eben so vielen Punkten F, F', ..., und bringt man das erstere System gegen das letztere in eine solche Lage, dass die Summe der Quadrate $AF^2+A'F'^2+\ldots$ rücksichtlich je zweier einander entgegengesetzten Verrückungen ein Maximum oder ein Minimum ist, so halten sich in dieser Lage die in A, A', ... nach den Richtungen

AF, $A'F'$, ... angebrachte und denselben Linien AF, ... ihrer Intensität nach proportionale Kräfte das Gleichgewicht.

§. 185.

Ob bei einem gegebenen Systeme im Gleichgewichte befindlicher Kräfte, nachdem diese durch Linien ausgedrückt worden sind, die Summe M der Quadrate dieser Linien in Bezug auf eine gegebene Verrückung ein Maximum oder Minimum sey, ist aus dem zweiten Differentiale von M zu beurtheilen. Dieses findet sich:

$$d^2M = 2\Sigma(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2\Sigma(Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z),$$

nachdem zuletzt für $\xi - x$, ... wieder X, ... gesetzt worden.

Es folgt hieraus zunächst, dass wenn der Körper, auf welchen die Kräfte wirken, nicht gedreht, sondern nur parallel mit sich verrückt wird, die Summe M stets ein Minimum ist. Denn wegen der Beständigkeit der von einander unabhängigen Differentiale da, db, dc, de werden, wenn der Drehungswinkel $de = 0$ gesetzt wird, auch d^2x, d^2y, d^2z, d^2x', ... $= 0$, folglich $d^2M = 2\Sigma(dx^2 + \ldots) =$ einer positiven Grösse, folglich u. s. w.

Eben so ist M rücksichtlich jeder Bewegung des Körpers ein Minimum, wenn das Gleichgewicht Sicherheit hat. Denn in diesem Falle ist $\Sigma(Xd^2x + \ldots)$ negativ (§. 182. zu Ende) und daher d^2M positiv.

Ist dagegen das Gleichgewicht unsicher, so kann nach Beschaffenheit der übrigen Umstände d^2M bald positiv, bald negativ, und daher die Summe M bald ein Grösstes, bald ein Kleinstes seyn.

Immer aber können die die Kräfte vorstellenden Linien so klein genommen werden, dass auch bei jedem unsichern Gleichgewichte die Summe ihrer Quadrate

stets ein Kleinstes ist. Denn lässt man $X, Y, Z, X', \ldots$ unendlich klein seyn, so wird das Glied $2\Sigma(Xd^2x + \ldots)$ von der dritten Ordnung und verschwindet damit gegen das Glied $2\Sigma(dx^2 + \ldots)$, welches von der zweiten Ordnung und immer positiv ist.

Wird demnach zu dem beweglichen Systeme der Angriffspunkte $A, A', \ldots$ mehrerer sich das Gleichgewicht haltender Kräfte ein zweites System von eben so viel den erstern resp. unendlich nahe liegenden unbeweglichen Punkten $F, F', \ldots$ hinzugefügt, so dass die Entfernungen $AF, A'F', \ldots$ der letztern Punkte von den ihnen entsprechenden Angriffspunkten ihrer Richtung und Grösse nach die Kräfte ausdrücken, so wird die Summe der Quadrate dieser Entfernungen bei jeder Verrückung des Systems der Angriffspunkte aus der Lage des Gleichgewichts stets grösser werden.

Diese Eigenschaft des Gleichgewichts ist es, welche ich in der Ueberschrift dieses Abschnitts das Princip der kleinsten Quadrate genannt habe. Es ist dieses Princip zuerst von Gauss aufgestellt worden, und zwar als ein specieller Fall eines weit allgemeineren von ihm entdeckten Princips, auf welches die ganze Mechanik gegründet werden kann.*)

§. 186.

Zum Schlusse wollen wir noch untersuchen, um wie viel die Summe der unendlich kleinen Quadrate wächst, wenn der Körper von der Lage des Gleichgewichts um ein unendlich Weniges entfernt wird.

---

*) Crelle's Journal IV. Band, S. 232.

Seyen ΔM, Δx, Δy, Δz die Incremente, welche M, x, y, z bei irgend einer Verrückung des Körpers erhalten, so ist (§. 184.):

$$\Delta M = -2\Sigma[(\xi-x)\Delta x+(\eta-y)\Delta y+(\zeta-z)\Delta z] + \Sigma(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2).$$

Werden nun die Incremente Δx, Δy, Δz unendlich klein genommen, so wird $\Sigma(\Delta x^2+\ldots)$ ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung, und wegen des vor der Verrückung angenommenen Gleichgewichts, $\Sigma[(\xi-x)\Delta x+\ldots]=\Sigma(X\Delta x+\ldots)=0$, d. h. = einem unendlich Kleinen von einer höhern Ordnung, als der ersten, so lange X, Y, Z endliche Grössen sind. Lässt man folglich auch X, Y, Z,... unendlich klein seyn, so wird $\Sigma(X\Delta x+\ldots)$ von einer höhern Ordnung, als der zweiten, und verschwindet damit gegen $\Sigma(\Delta x^2+\ldots)$, und die vorige Gleichung reducirt sich auf:

$$\Delta M=\Sigma(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2).$$

Bezeichnen daher A, A',... die Oerter der Angriffspunkte beim Gleichgewichte und B, B',... die Oerter derselben nach einer unendlich kleinen Verrückung, so hat man

$$\Sigma(BF^2)-\Sigma(AF^2)=\Sigma(AB^2),$$

d. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen der Punkte des beweglichen Systems von den entsprechenden unbeweglichen Punkten wächst bei einer unendlich kleinen Verrückung des beweglichen Systems um die Summe der Quadrate der von den Punkten dieses Systems beschriebenen Wege.

§. 187.

Zusätze. *a.* Wirken alle Kräfte auf einen einzigen Punkt A, fallen also A', A'',... mit A, und da-

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite 7 Zeile 10 v. o. lies: In derselben

— 21 — 12 v. u. lies: wir, mit

— 23 — 3 v. u. lies: enthaltene mit p und p' nicht parallele Kraft q

— 96 — 3 v. u. statt Seiten lies Kanten.

— 112 — 7 v. u. lies: Z, Z', ... und die Coordinaten z, z', ...

— 139 — 12 v. o. statt M lies: M.

— 142 — 9 v. o. statt Gleichung lies: Gleichungen.

— 143 — 9 v. o. statt $t^{\wedge}t$ lies: $t^{\wedge}t'$. Auf eben der Seite setze statt der 14—17. Zeile v. o.: Unter den verschiedenen Axen t' der grössten Momente, welche den verschiedenen Punkten (f, g, h) zugehören, fallen aber diejenigen in die Hauptlinie, welche mit v, d. i. mit der Resultante

— 169 — 6 u. 7 v. o. lies: und die Momente dieser nach

— 176 — 10 v. o. statt C^2 lies μ.

— 179 — 8 u. 9 v. o. statt: indem es sonst für den Durchschnittspunkt M zwei, setze: indem, wenn es für einen Punkt zwei

— — — 10 v. o. lies: gäbe, auch jede andere. Auf eben der Seite schiebe zwischen die 8. und 9. Zeile v. u. ein: Hiernach aber hätte die Aufgabe, ihrer Natur entgegen, unzählig viele Lösungen.

— 221 — 17 v. o. vertilge das Komma am Ende der Zeile.

— 232 — 9 v. o. lies: $x_{,,}$ $y_{,}$; $x'_{,,}$ $y'_{,}$;

— — — 4 v. u. statt $aA - bB$ setze: $aB - bA$.

— 256 — 10 v. o. lies: hinzuzufügen,

— 328 — 6 v. o. lies: Denn das Gleichgewicht des neuen Systems,

— 338 — 8 v. o. lies: *die Summe der in die virtuellen Geschwindigkeiten multiplicirten Kräfte*

